Fizyka 1B

Wykład 8

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

Katedra Fizyki Doświadczalnej

Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

Równowaga statyczna i sprężystość

- Warunki równowagi statycznej
- Przykłady równowagi statycznej
- Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości
- Sprężystość i plastyczność

Równowaga statyczna i sprężystość

- Równowaga statyczna oznacza brak ruchu,
- równowaga dynamiczna oznacza ruch bez przyspieszenia,
- określmy warunki równowagi statycznej ruchu postępowego i równowagi statycznej ruchu obrotowego, aby opisać sytuacje typowe dla każdego rodzaju konstrukcji technicznych.
- Właściwości sprężyste materiałów są szczególnie ważne w zastosowaniach technicznych, także w bioinżynierii.

Równowaga statyczna i sprężystość

- Mówimy, że ciało sztywne jest w równowadze (*ang. equilibrium*), kiedy zarówno jego liniowe jak i kątowe przyspieszenie wynoszą zero względem inercjalnego układu odniesienia,
- ciało w równowadze może się poruszać, ale tylko pod warunkiem, że jego prędkość liniowa i prędkość kątowa są stałe.
- Bryła sztywna jest w równowadze statycznej kiedy jest w spoczynku w naszym układzie odniesienia.
- Rozróżnienie stanu spoczynku i stanu ruchu jednostajnego jest sztuczne – obiekt może spoczywać w naszym układzie odniesienia, ale obserwatorowi, w innym układzie odniesienia, ten sam przedmiot wydaje się znajdować w ruchu jednostajnym.
- Ponieważ ruch jest względny, to co pozostaje w równowadze statycznej dla nas jest w równowadze dynamicznej dla obserwatora w ruchu (i na odwrót).
- Ponieważ prawa fizyki są identyczne dla wszystkich inercjalnych układów odniesienia, to w takim układzie nie ma rozróżnienia równowagi statycznej i równowagi dynamicznej.

Równowaga statyczna i sprężystość

- Zgodnie z drugim prawem dynamiki Newtona, liniowe przyspieszenie ciała sztywnego spowodowane jest działaniem niezrównoważonej siły na to ciało:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{\text{ŚM}}$$

- W równowadze, przyspieszenie liniowe wynosi zero, czyli

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

- Jest to pierwszy warunek równowagi statycznej ciała sztywnego i wyraża równowagę w ruchu postępowym.

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0$$

Równowaga statyczna i sprężystość

- Analogicznie, możemy stwierdzić, że przyspieszenie kątowe ciała sztywnego wokół ustalonej osi obrotu zostaje spowodowane działaniem wypadkowego momentu sił na to ciało:

$$\sum_i \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon}$$

- W równowadze przyspieszenie kątowe wynosi zero - otrzymujemy warunek równowagi momentów sił

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$$

- Jest to drugi warunek równowagi statycznej ciała sztywnego i wyraża równowagę w ruchu obrotowym.

$$\sum_i M_{ix} = 0, \quad \sum_i M_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{iz} = 0$$

Równowaga statyczna i sprężystość

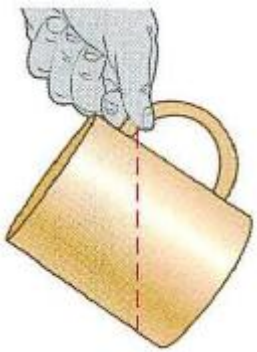
- Praktycznie, przy stosowaniu warunków równowagi ciała sztywnego możemy swobodnie wybrać położenie osi obrotu i dowolny punkt jako początek układu odniesienia.
- Wybór układu odniesienia jest podyktowany specyfiką problemu fizycznego, który rozwiązujemy.
- W jednym układzie odniesienia, matematyczna postać warunków równowagi może być dość skomplikowana, podczas gdy w innym te same warunki mogą mieć prostszą postać matematyczną, która jest łatwa do rozwiązania.

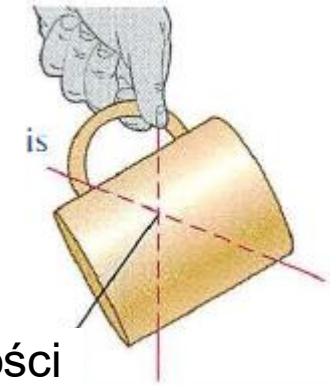
Równowaga statyczna i sprężystość

- W wielu sytuacjach równowagi jedną z sił działających na ciało jest jego ciężar (siła ciężkości).
- Przyjmuje się że, środek ciężkości jest identyczny ze środkiem masy (a niekoniecznie ze środkiem geometrycznym, nawet dla brył regularnych).
- Gdy ŚM znajduje się poza osią obrotu, to wypadkowy moment siły ciężkości działa na obiekt.
- Moment siły ciężkości jest to moment spowodowany przez ciężar. Może on obracać przedmiot, jeśli ten nie ma punktu podparcia aby go zrównoważyć.
- Wielkość momentu siły grawitacji zależy od tego, jak daleko od osi obrotu znajduje się ŚM.

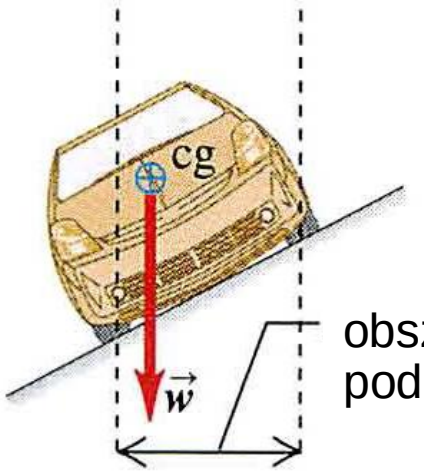
Równowaga statyczna i sprężystość

Środek ciężkości



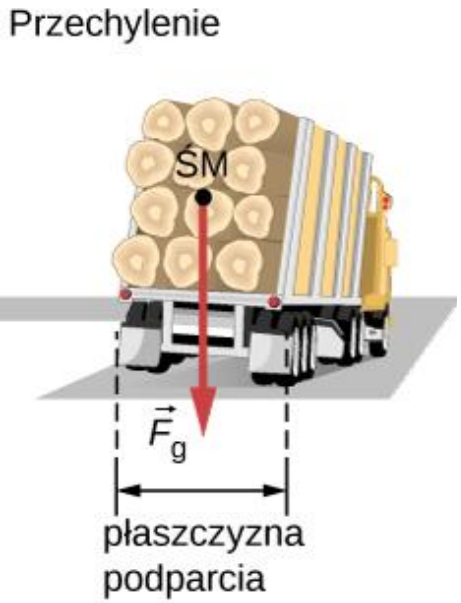


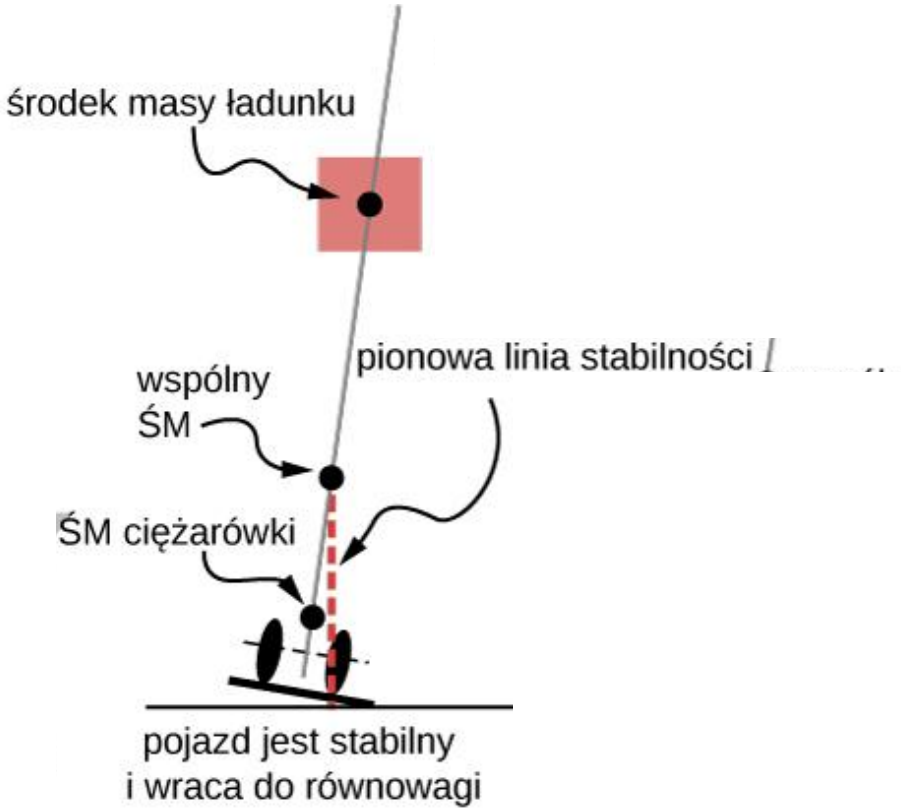
środek ciężkości



obszar
podparcia

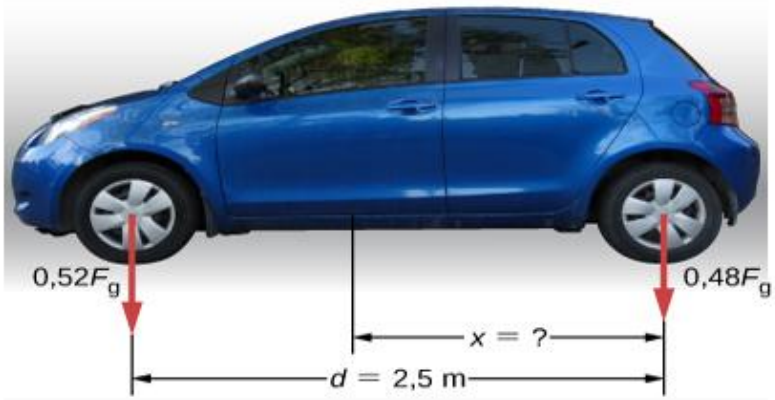
Równowaga statyczna i sprężystość

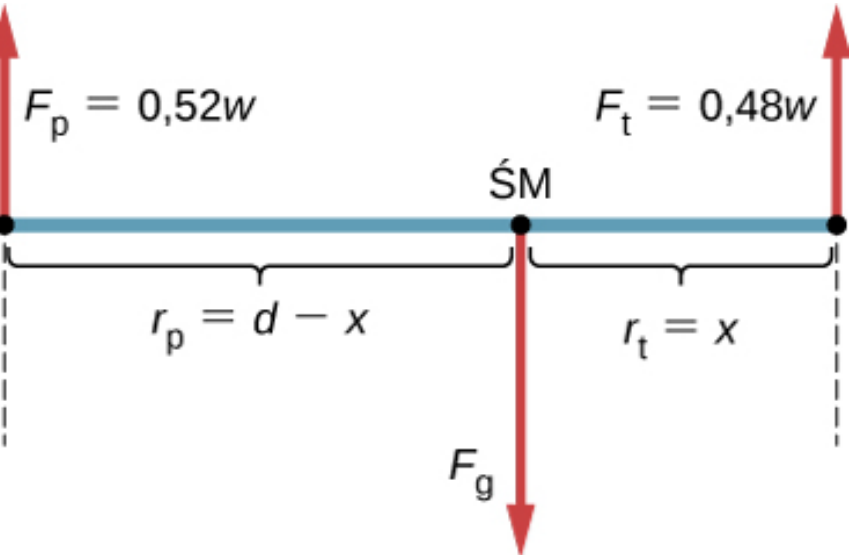


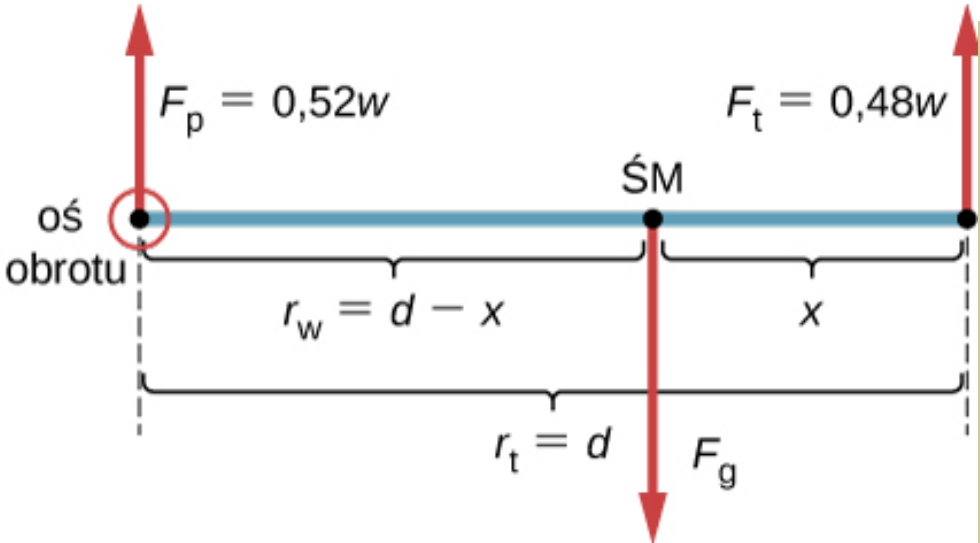


Równowaga statyczna i sprężystość

Na płaskim podłożu samochód osobowy o rozstawie osi 2,5 m wywiera na przedniej osi nacisk wynoszący 52% ciężaru pojazdu. Gdzie jest położony ŚM tego samochodu w stosunku do tylnej osi?

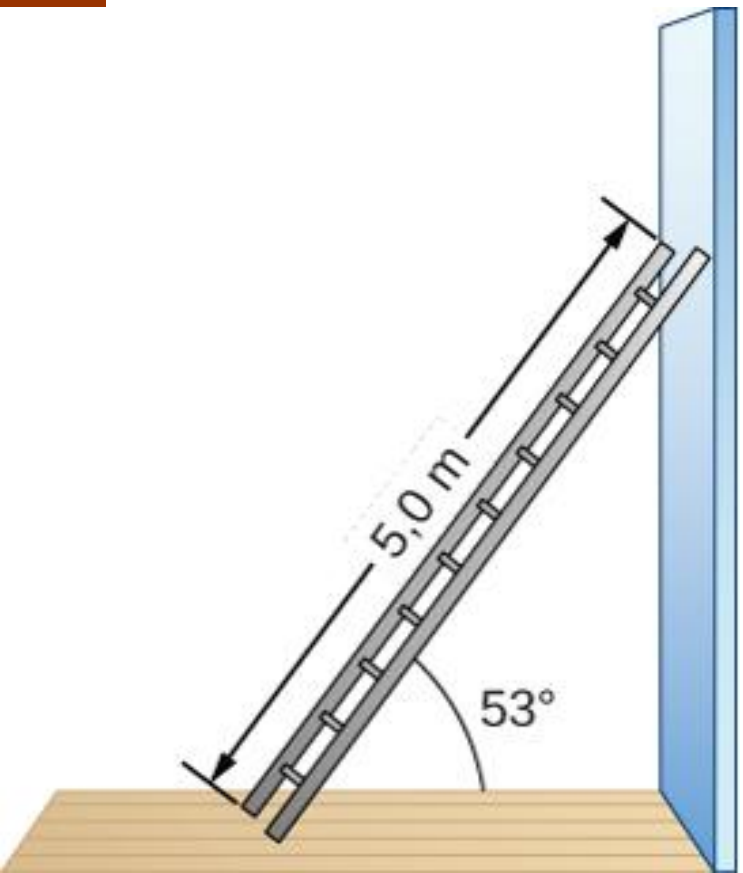


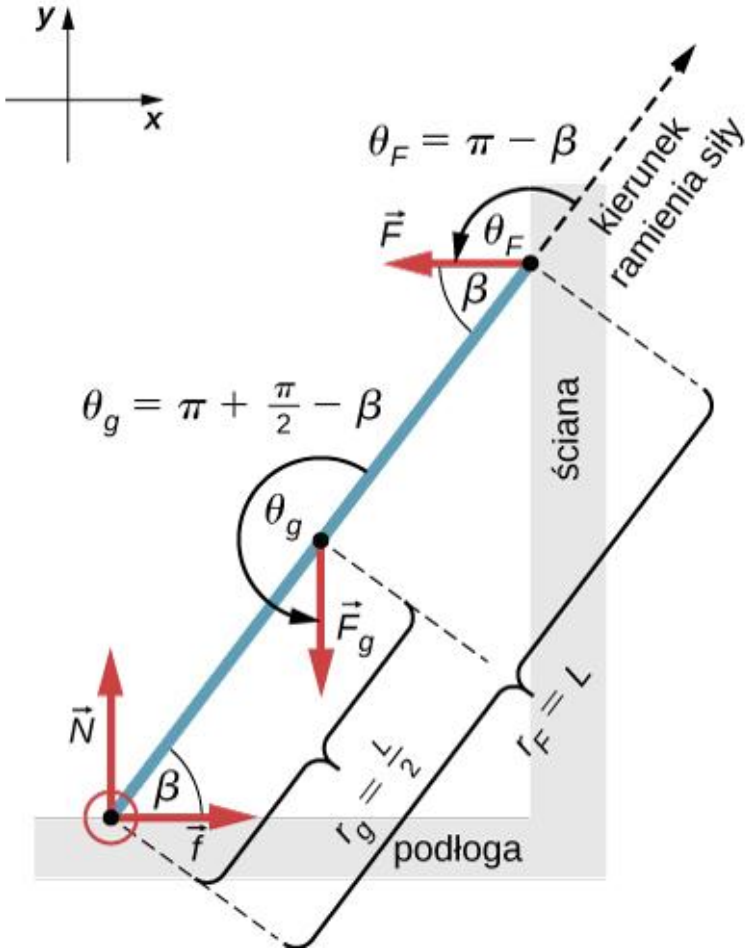




Równowaga statyczna i sprężystość

Jednolita drabina od długości l = 5m i ciężarze 400 N opiera się o pionową śliską ścianę. Kąt nachylenia między drabiną a szorstką podłogą wynosi $\beta = 53^o$. Znajdź siły reakcji podłogi i ściany na drabinę oraz współczynnik tarcia statycznego μ_s na styku drabiny z podłogą, uniemożliwiający poślizg drabiny.



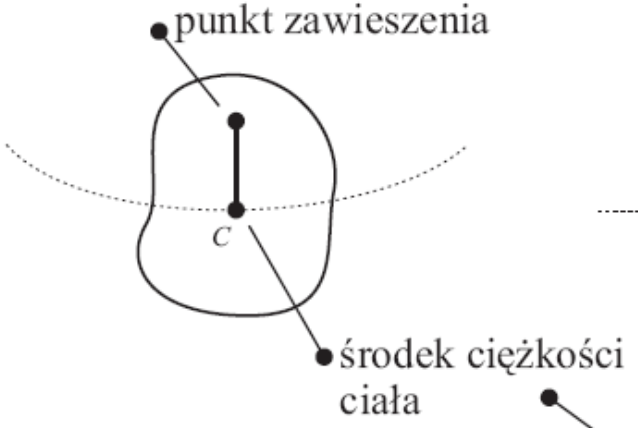


Równowaga statyczna i sprężystość

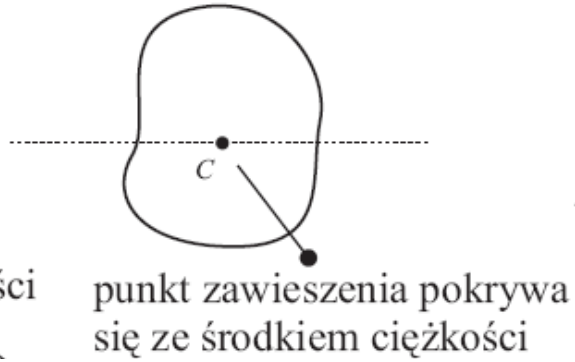
Rodzaje równowagi ciała

równowaga trwała

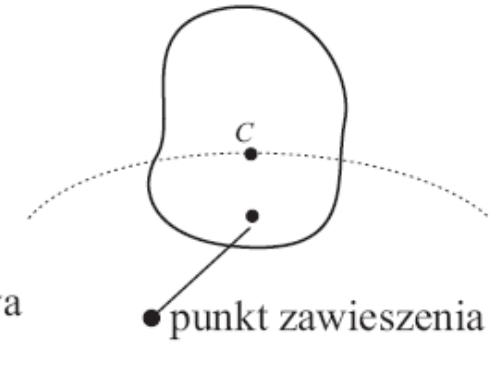
ciało zawieszone



równowaga obojętna



równowaga chwiejna



Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

- Model bryły sztywnej to przykład wyidealizowanego obiektu, który nie ulega deformacji pod wpływem sił zewnętrznych.
- Jest on bardzo użyteczny przy analizie układów mechanicznych, a wiele obiektów fizycznych jest sztywnych w szerokim zakresie warunków.
- Stopień, w jakim obiekt może być postrzegany jako sztywny, zależy od właściwości fizycznych materiału, z którego został wykonany.

Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

- Przejdziemy od sił wpływających na ruch obiektu do tych, które wpływają na kształt obiektu.
- Zmiana kształtu spowodowana działaniem siły nazywana jest **deformacją** (ang. *deformation*).
- Deformację wywołują siły zewnętrzne, na przykład: zgniatania, ściskania, (ro)zrywania, skręcania, ścinania czy rozciągania.
- Dwa terminy opisują siły działające na obiekty podlegające deformacji: **naprężenie** (ang. *stress*) i **odkształcenie** (ang. *strain*).

Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

- **Naprężenie** to wielkość opisująca wartość sił powodujących deformację.
- Jest ono ogólnie definiowane jako siła na jednostkę powierzchni.
- Kiedy siły oddziałują na przedmiot i powodują jego wydłużenie takie naprężenie nazywamy naprężeniem rozciągającym (ang. *tensile stress*).
- Kiedy siły powodują ściskanie przedmiotu, wówczas mówimy o naprężeniu ściskającym (ang. *compressive stress*).
- Kiedy obiekt jest ściskany ze wszystkich stron nazywamy to naprężeniem objętościowym (ang. *bulk stress*).
- W innych sytuacjach działające siły, nie będąc ani rozciągającymi, ani ściskającymi, wciąż powodują zauważalne deformacje.
- Gdy siły odkształcające działają stycznie do powierzchni obiektu, nazywamy je siłami ścinającymi, a naprężenie, które powodują, nazywamy naprężeniem ścinającym (ang. *shear stress*).
- Jednostką naprężenia w układzie SI jest paskal (Pa). Gdy siła 1 N naciska na powierzchnię 1 m^2 naprężenie wynosi 1 Pa:

Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

$$\text{jeden paskal} = 1\ \text{Pa} = \frac{1\ \text{N}}{1\ \text{m}^2}$$

$$1\ \text{psi} = 6895\ \text{Pa} \quad \text{oraz} \quad 1\ \text{Pa} = 1{,}45 \cdot 10^{-4}\ \text{psi}$$

$$1\ \text{atm} = 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{Pa} = 14{,}7\ \text{psi}.$$

Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

- Obiekt lub ośrodek pod wpływem naprężania ulega deformacji.
- Wielkość, która opisuje tę deformację, nazywa się **odkształceniem**.
- Odkształcenie podawane jest albo jako:
  - względna zmiana długości (dla naprężeń rozciągających),
  - zmiana objętości (dla naprężeń objętościowych),
  - geometrii (dla naprężeń ścinających).
- Odkształcenie jest wartością bezwymiarową.
  - odkształcenie pod wpływem naprężenia rozciągającego nazywamy odkształceniem rozciągającym (ang. *tensile strain*) (lub liniowym),
  - odkształcenie pod wpływem naprężenia objętościowego nazywa się odkształceniem objętościowym (ang. *bulk strain*),
  - spowodowane naprężeniem ścinającym - odkształceniem ścinającym (ang. *shear strain*).

Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

- Im większe naprężenie, tym większe odkształcenie, jednakże zależność między odkształceniem a naprężeniem nie musi być liniowa.
- Tylko gdy naprężenie jest wystarczająco małe, odkształcenie powodowane naprężeniem pozostaje wprost proporcjonalne do wartości naprężenia.
- Stałą proporcjonalności w tym stosunku nazywamy modułem sprężystości (ang. *elastic modulus*).
- W zakresie liniowej zależności dla małych wartości naprężeń, ogólny związek między naprężeniem a odkształceniem to:

$$\text{naprężenie} = (\text{moduł sprężystości}) \cdot (\text{odkształcenie})$$

Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

- Moduł sprężystości dla:
  - naprężenia rozciągającego nazywa się modułem Younga,
  - naprężenia objętościowego - modułem Helmholtza (moduł sprężystości objętościowej, moduł odkształcalności objętościowej albo moduł ściśliwości),
  - naprężenia ścinającego - modułem Kirchhoffa (moduł sprężystości poprzecznej, moduł odkształcalności postaciowej albo moduł ścinania).
- Moduły sprężystości dla różnych materiałów mierzy się w różnych warunkach fizycznych (np. zmienna temperatura) i zbiera w tabelach danych inżynierskich.

Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

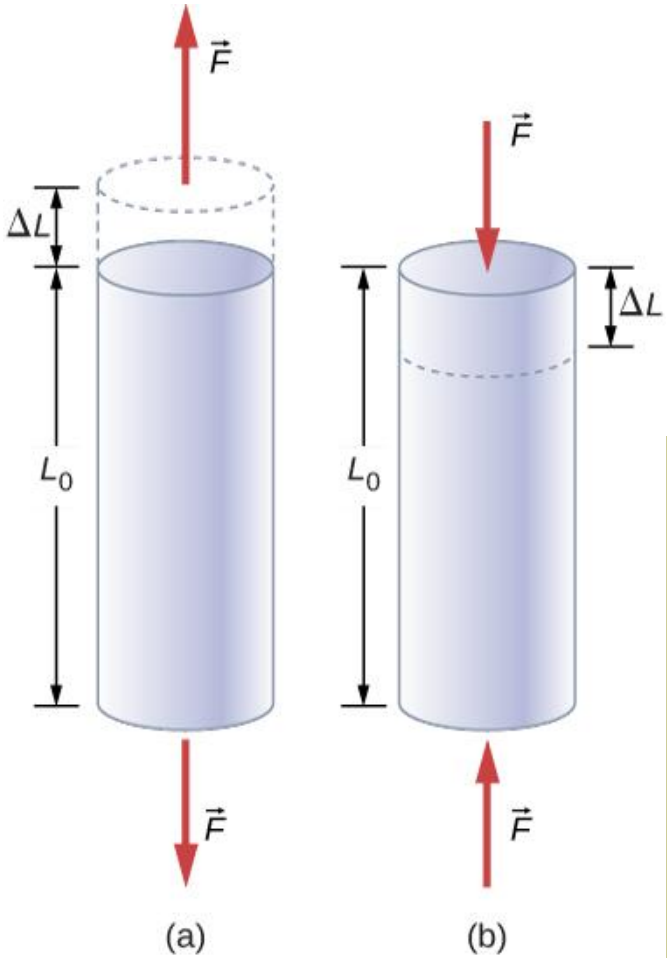
Naprężenie i odkształcenie rozciągające lub ściskające oraz moduł Younga

- Tak w przypadku rozciągania jak ściskanie definiujemy naprężenie jako stosunek siły odkształcającej do przekroju poprzecznego odkształconego obiektu.

$$\text{naprężenie rozciągające} = \frac{F_\perp}{A}$$

- Odkształcenie rozciągające jest miarą deformacji obiektu pod wpływem naprężeń rozciągających i definiuje się je jako względną zmianę długości obiektu, gdy doświadcza on naprężenia rozciągającego:

$$\text{odkształcenie rozciągające} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

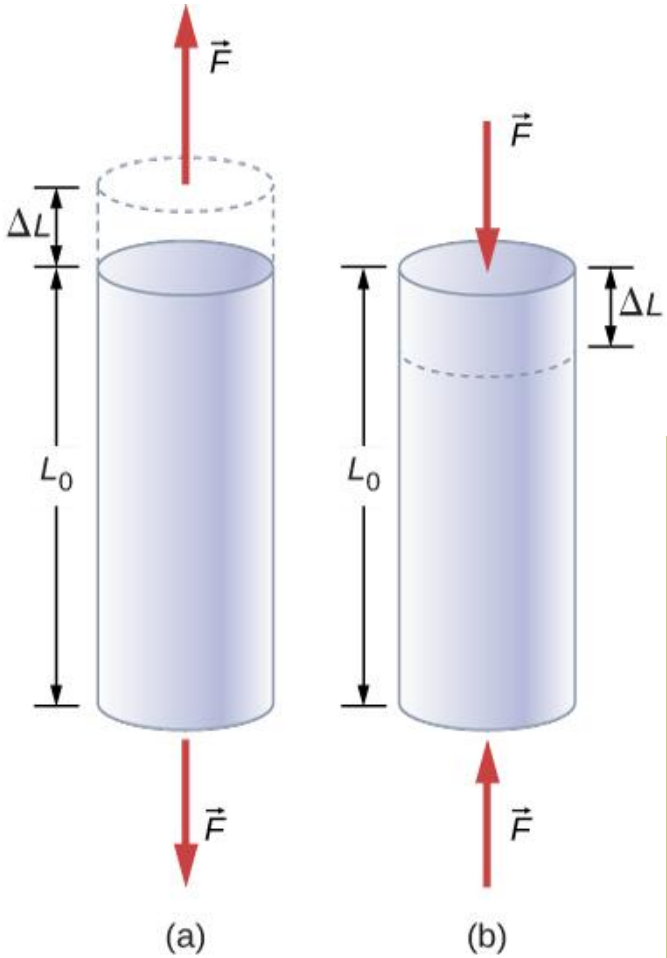


Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Naprężenie i odkształcenie rozciągające lub ściskające oraz moduł Younga

- Moduł Younga jest modułem sprężystości, gdy odkształcenie zostaje spowodowane naprężeniem rozciągającym lub ściskającym i określa je równanie

$$E = \frac{\text{naprężenie rozciągające}}{\text{odkształcenie rozciągające}} = \frac{F_\perp / A}{\Delta L / L_0} = \frac{F_\perp}{A}\frac{L_0}{\Delta L}$$



Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Naprężenie ściskające w kolumnie

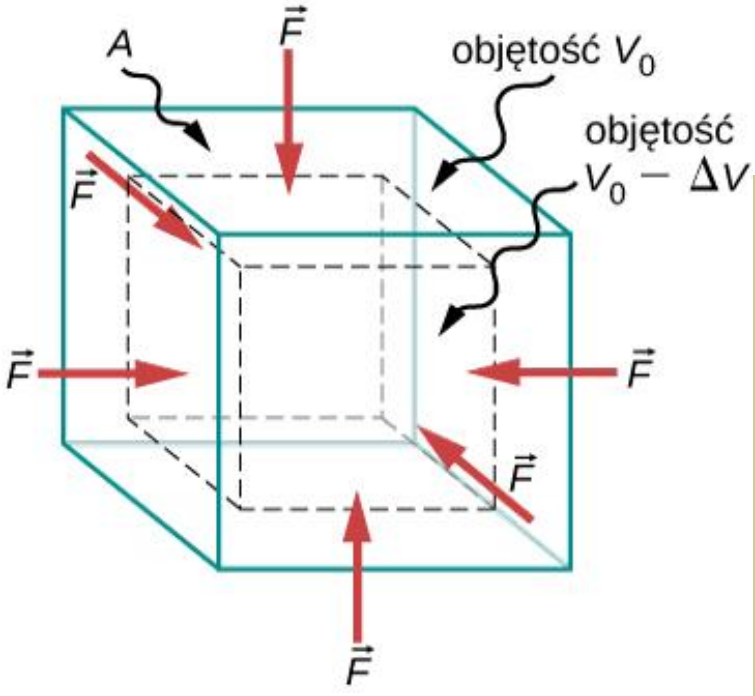
Rzeźba o ciężarze 10 000 N spoczywa na poziomej powierzchni u szczytu pionowej kolumny o wysokości 6 m. Powierzchnia przekroju poprzecznego kolumny wynosi 0,2 m^2 i wykonana jest z granitu o gęstości 2700 kg/m^3. Oblicz naprężenie ściskające w przekroju znajdującym się 3 m poniżej górnej części kolumny i wartości odkształcenia ściskającego górny 3-metrowy odcinek kolumny.



Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Naprężenie i odkształcenie objętościowe oraz moduł Helmholtza (moduł sprężystości objętościowej)

- Kiedy zanurzamy się w wodzie, czujemy siłę naciskającą na każdą część ciała ze wszystkich stron. To, czego doświadczamy, jest to naprężenie objętościowe, czyli ciśnienie.
- Naprężenie objętościowe zawsze ma tendencję do zmniejszania objętości otoczonej powierzchnią zanurzonego obiektu.
- Siły ściskania zawsze są prostopadłe do powierzchni zanurzonego obiektu.

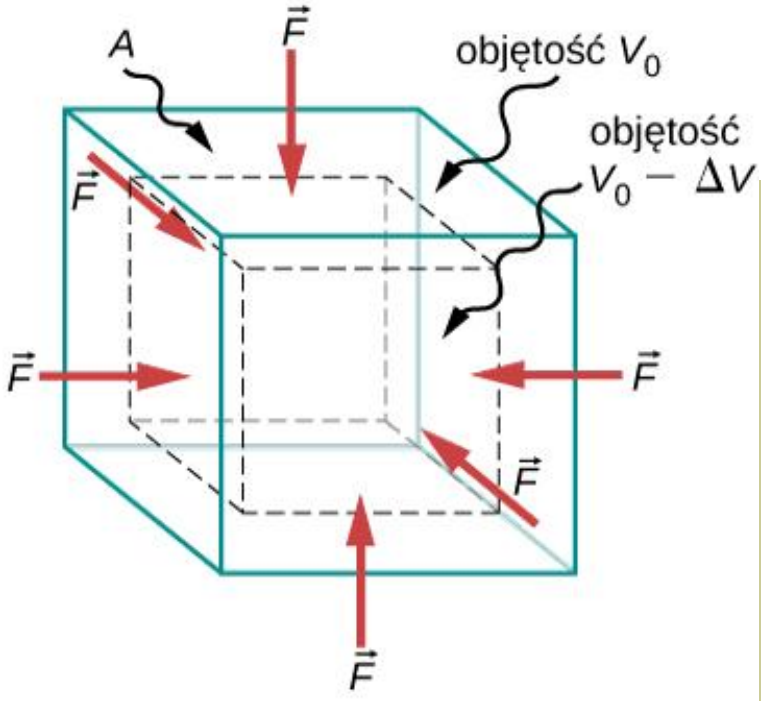


Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Naprężenie i odkształcenie objętościowe oraz moduł Helmholtza (moduł sprężystości objętościowej)

- Efektem ich działania jest zmniejszenie objętości zanurzonego obiektu o wielkość w porównaniu z objętością obiektu przy braku naprężeń objętościowych.
- Ten rodzaj odkształcenia nazywa się odkształceniem objętościowym i określa go zmiana objętości w stosunku do pierwotnej objętości:

$$\text{odkształcenie objętościowe} = \frac{\Delta V}{V_0}$$



Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Naprężenie i odkształcenie objętościowe oraz moduł Helmholtza (moduł sprężystości objętościowej)

- Odkształcenie objętościowe wynika z naprężenia objętościowego, czyli normalnej do powierzchni siły naciskającej na powierzchnię zanurzonego obiektu. Ta wielkość fizyczna oraz ciśnienie są zdefiniowane jako:

$$\text{ciśnienie} = p \equiv \frac{F_\perp}{A}$$

- Kiedy wzrasta naprężenie objętościowe, odpowiednio zwiększa się odkształcenie objętościowe.
- Stała proporcjonalności w tym stosunku nazywa się modułem Helmholtza (inaczej modułem sprężystości objętościowej lub modułem odkształcalności objętościowej):

$$K = \frac{\text{naprężenie objętościowe}}{\text{odkształcenie objętościowe}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} = -\Delta p \frac{V_0}{\Delta V}$$

Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Naprężenie i odkształcenie objętościowe oraz moduł Helmholtza (moduł sprężystości objętościowej)

$$K = \frac{\text{naprężenie objętościowe}}{\text{odkształcenie objętościowe}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} = -\Delta p \frac{V_0}{\Delta V}$$

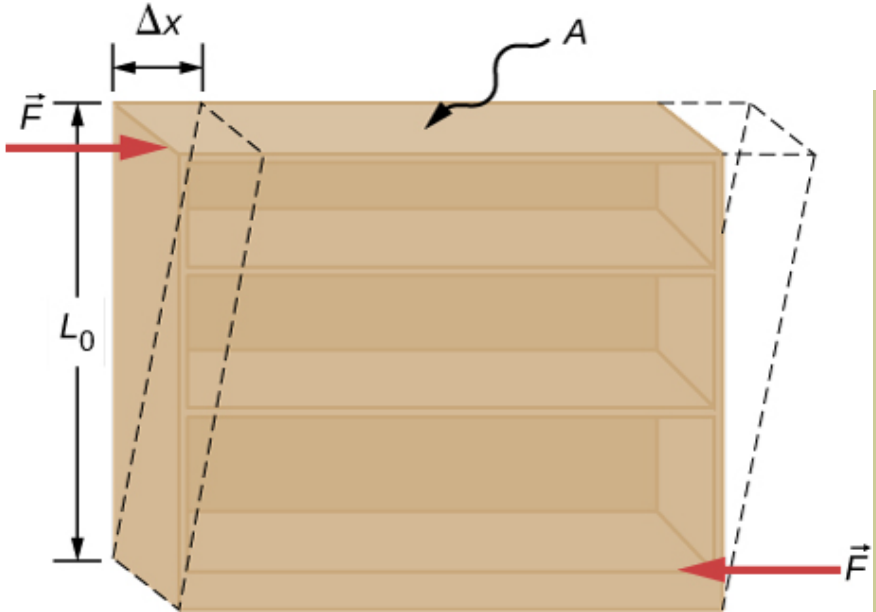
- Znak minus wprowadzono dla spójności, aby moduł był wielkością dodatnią - wzrost ciśnienia o (dodatnia wartość) zawsze powoduje spadek objętości.
- Odwrotność modułu Helmholtza nazywa się współczynnikiem sprężystości objętościowej bądź współczynnikiem ściśliwości β

$$\beta = \frac{1}{K} = -\frac{\Delta V / V_0}{\Delta p}$$

Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Naprężenie i odkształcenie ścinające oraz moduł Kirchhoffa

- Koncepcje naprężenia i odkształcenia ścinającego dotyczą jedynie ciał stałych.
- Budynki i płyty tektoniczne to przykłady obiektów, narażonych na naprężenia ścinające.
- Odkształcenie ścinające występuje, gdy do przeciwległych powierzchni ciała stałego przyłożone są stycznie dwie równoległe przeciwnie skierowane siły o równej wartości, nie powodujące odkształcenia w kierunku poprzecznym do kierunku siły.



Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

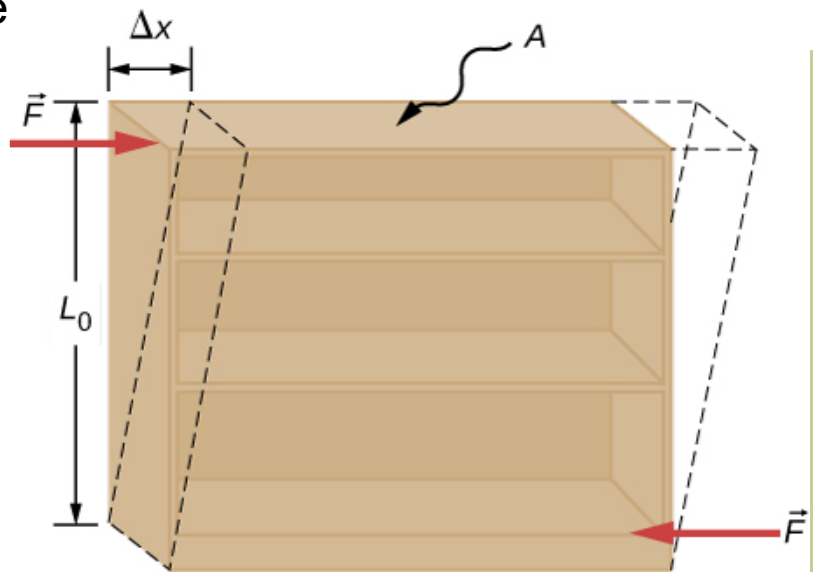
Naprężenie i odkształcenie ścinające oraz moduł Kirchhoffa

- Odkształcenie ścinające charakteryzuje się stopniowym przesunięciem warstw w kierunku stycznym do sił działających.
- Odkształcenie ścinające to stosunek największego przesunięcia do poprzecznej odległości:

$$\text{odkształcenie ścinające} = \frac{\Delta x}{L_0}$$

- Odkształcenie ścinające jest spowodowane naprężeniem ścinającym – wywoływanym przez siły równoległe do powierzchni.

$$\text{naprężenie ścinające} = \frac{F_{\parallel}}{A}$$

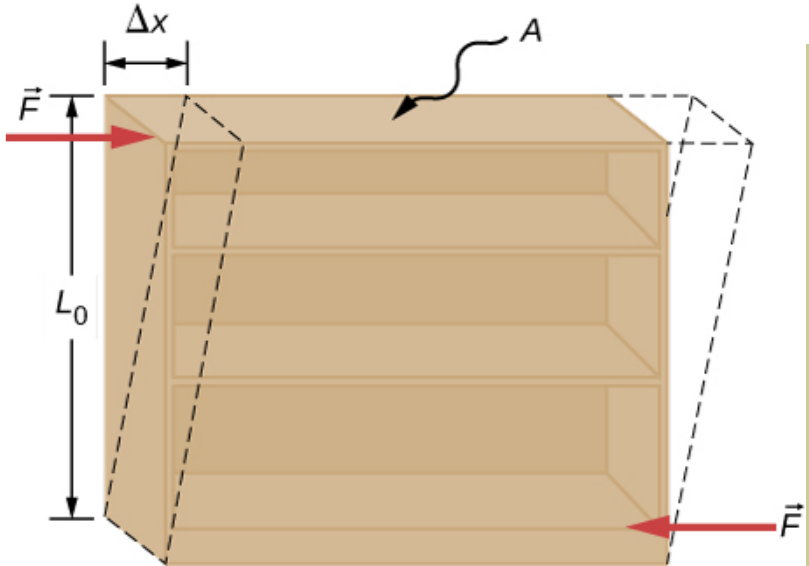


Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Naprężenie i odkształcenie ścinające oraz moduł Kirchhoffa

- Modułem Kirchhoffa (inaczej moduł ścinania, moduł sztywności, moduł odkształcalności postaciowej albo moduł sprężystości poprzecznej) jest stała proporcjonalności, określona przez stosunek naprężenia do odkształcenia, *G*:

$$G = \frac{\text{naprężenie ścinające}}{\text{odkształcenie ścinające}} = \frac{F_{\parallel}/A}{\Delta x / L_0} = \frac{F_{\parallel}}{A}\,\frac{L_0}{\Delta x}$$



Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Materiał	moduł Younga E ($\cdot\ 10^{10}$Pa)	moduł Helmholtza K ($\cdot\ 10^{10}$Pa)	moduł Kirchhoffa G ($\cdot\ 10^{10}$Pa)
Glin	7,0	7,5	2,5
Kość (rozciąganie)	1,6	0,8	8,0
Kość (ściskanie)	0,9		
Mosiądz	9,0	6,0	3,5
Cegła	1,5		
Beton	2,0		
Miedź	11,0	14,0	4,4
Szkło (kron)	6,0	5,0	2,5
Granit	4,5	4,5	2,0
Włosy (ludzkie)	1,0		
Drewno twarde	1,5		1,0
Żelazo	21,0	16,0	7,7
Ołów	1,6	4,1	0,6
Marmur	6,0	7,0	2,0

Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Materiał	moduł Younga E $(\cdot\ 10^{10}\mathrm{Pa})$	moduł Helmholtza K $(\cdot\ 10^{10}\mathrm{Pa})$	moduł Kirchhoffa G $(\cdot\ 10^{10}\mathrm{Pa})$
Etanol		0,09	
Gliceryna		0,45	
Rtęć		2,5	
Woda		0,22	

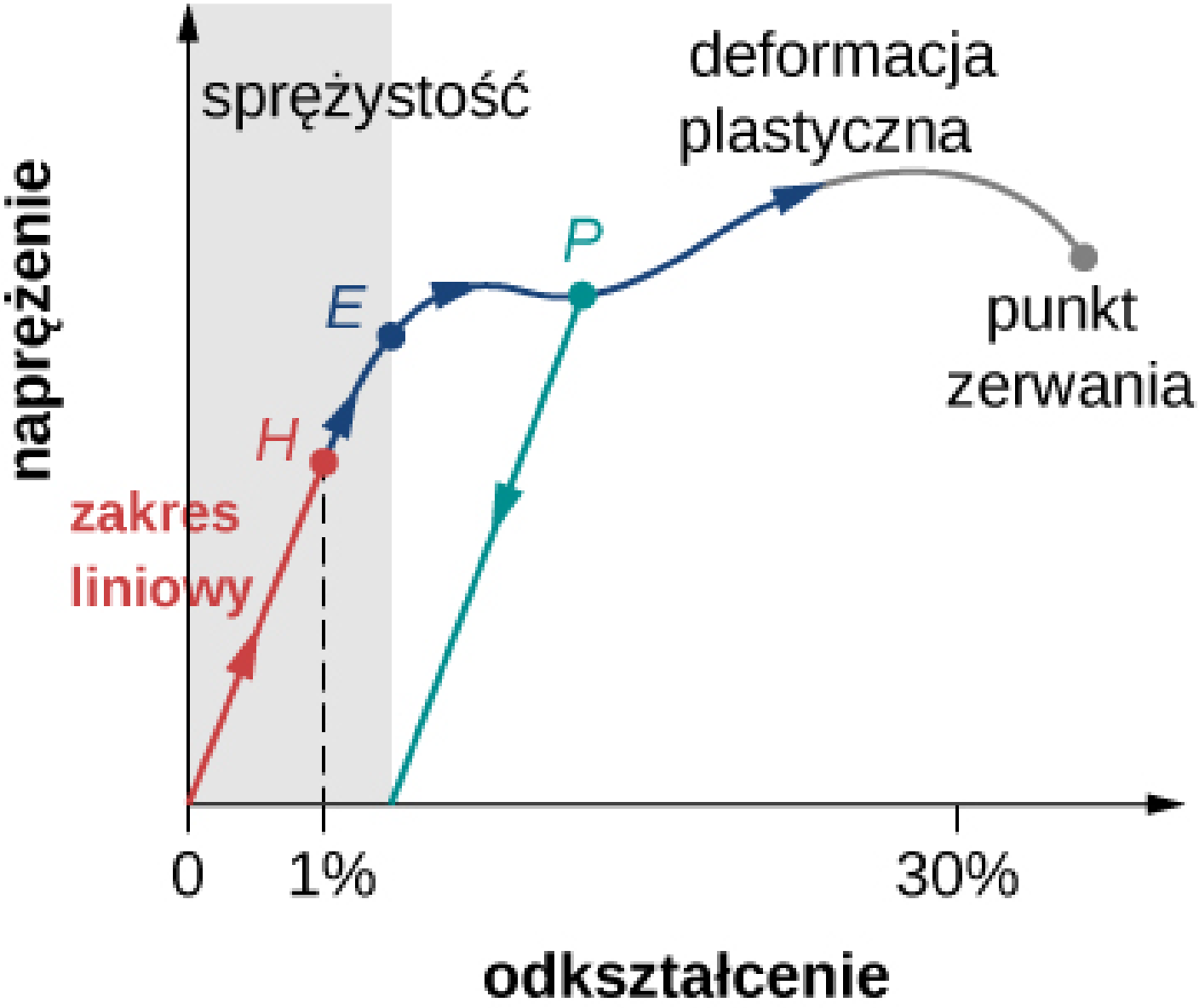
Sprężystość i plastyczność

- Co to znaczy, że obiekt ma być sprężysty i jak opisujemy jego zachowanie?
- Sprężystość to tendencja ciał stałych i materiałów do powrotu do pierwotnego kształtu, gdy siły zewnętrzne powodujące deformację przestają oddziaływać.
- Obiekt jest sprężysty, jeśli powraca do pierwotnego rozmiaru i kształtu, gdy obciążenie ustaje.
- Fizyczne czynniki powodujące sprężystość są różne w różnych materiałach i zależą od ich mikroskopowej struktury,
- sprężystość polimerów i kauczuków wynika z rozciągania łańcuchów polimerowych pod wpływem działającej siły,
- sprężystość metali warunkują zmiany rozmiaru i kształtu komórek sieci krystalicznej pod wpływem sił zewnętrznych.

Sprężystość i plastyczność

- parametry określające sprężystość każdego materiału to: moduł sprężystości i granica sprężystości,
- duży moduł sprężystości jest typowy dla materiałów trudnych do zdeformowania,
- mały moduł sprężystości jest typowy dla materiałów łatwo ulegających deformacji pod wpływem obciążenia,
- jeśli naprężenie spowodowane obciążeniem staje się zbyt duże, wówczas nawet po ustąpieniu obciążenia materiał nie powraca już do pierwotnego kształtu i wielkości - ulega trwałemu zdeformowaniu,
- granica sprężystości to taka wartość naprężeń, po której przekroczeniu materiał przestaje być sprężysty i ulega trwałemu zdeformowaniu.

Sprężystość i plastyczność



Dziękuję za uwagę!