

Fizyka 1B

Wykład 2

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

**Katedra Fizyki Doświadczalnej
Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej**

Ruch prostoliniowy

Położenie

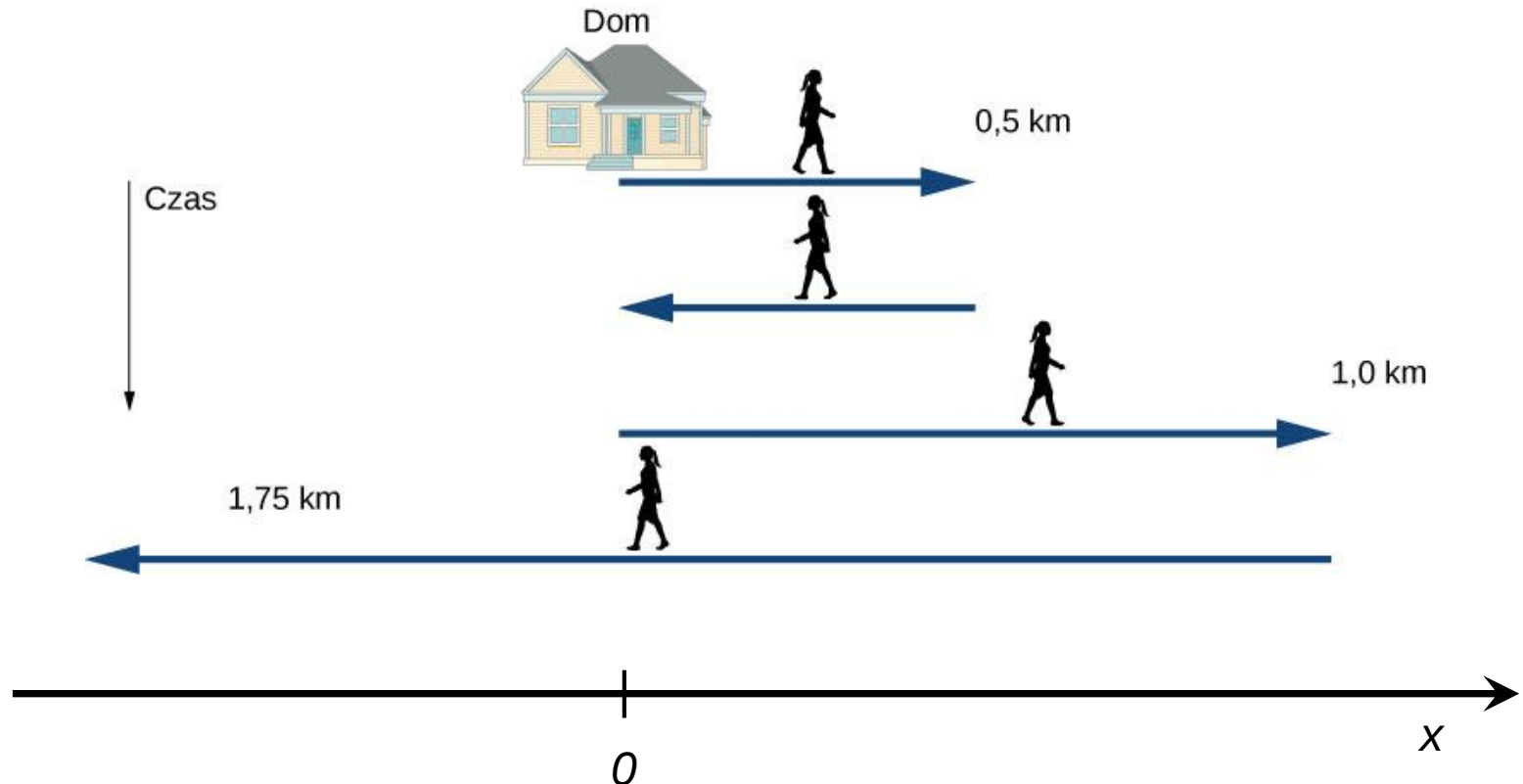
- aby opisać ruch ciała, należy zdefiniować położenie ciała w wybranym układzie odniesienia, z którym zwiążesz pewien matematyczny układ współrzędnych,
- układ odniesienia jest dowolnie wybranym układem osi, względem których mierzymy położenie i opisujemy ruch ciała,
- jako układ odniesienia najczęściej wybieramy Ziemię (lub spoczywające na Ziemi obiekty),
- mówimy wtedy o ruchu względem Ziemi (podłoża, gruntu, powierzchni itd.).



Ruch prostoliniowy

Położenie

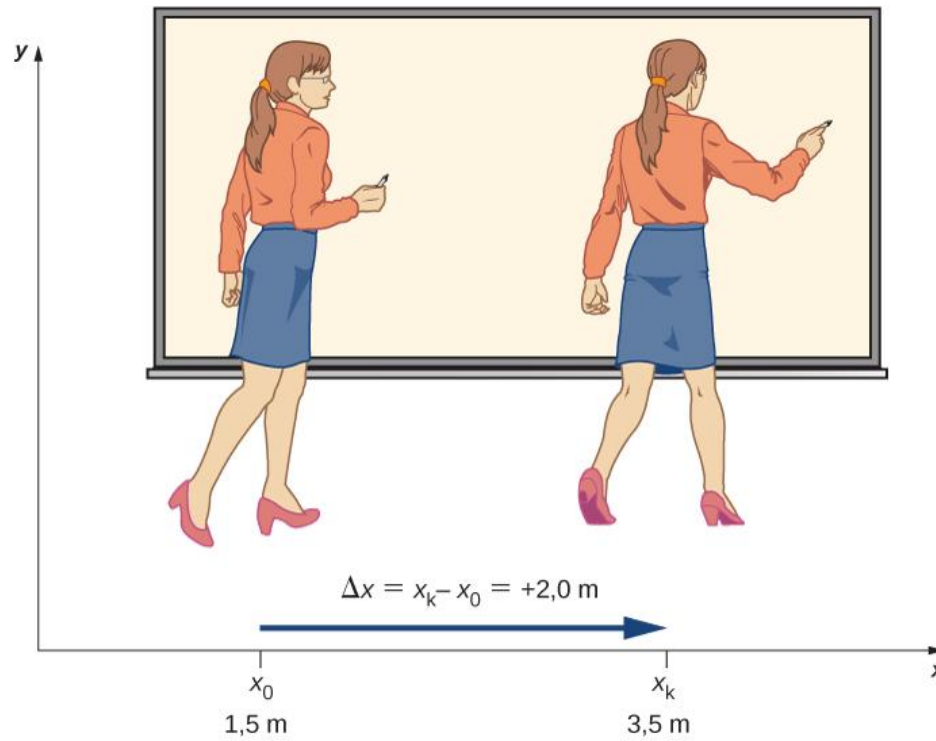
- położenie ciała w ruchu jednowymiarowym podajemy najczęściej wzdłuż osi OX .
- ruch wzdłuż jednej osi (ruch jednowymiarowy) odbywający się po linii prostej – nazywamy też ruchem prostoliniowym



Ruch prostoliniowy

Przemieszczenie

- jeżeli jakieś ciało się porusza to jego położenie się zmienia,
- ta zmiana położenia nazywa się **przemieszczeniem**,
- przemieszczenie, czyli zmiana położenia, jednoznacznie sugeruje ruch, czyli zmianę położenia – ciało się przemieściło lub doznało przemieszczenia,
- przemieszczenie jest różnicą położeń na prostej (osi) przed i po wykonaniu ruchu,
- przemieszczenie wyraźnie wskazuje na kierunek ruchu czyli jest wektorem (może być zarówno dodatnie, jak i ujemne)



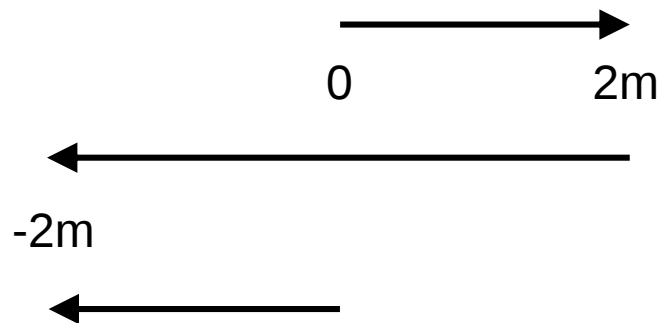
Ruch prostoliniowy

Przemieszczenie

$$\Delta x = x_k - x_0$$

- ciała w ruchu mogą doznawać kilku lub nawet całej serii przemieszczeń,
- całkowite przemieszczenie definiujemy jako sumę pojedynczych przemieszczeń

$$\Delta x_{\text{całk}} = \sum \Delta x_i$$



$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 2 \text{ m} - 0 \text{ m} = 2 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = (-2 \text{ m}) - 2 \text{ m} = -4 \text{ m}$$

$$\Delta x_{\text{całk}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2 \text{ m} - 4 \text{ m} = -2 \text{ m}$$

Ruch prostoliniowy

Przemieszczenie

- długość przemieszczenia nie powinna być mylona z drogą, jaką przebyło ciało,
- droga przebyta w ruchu przez ciało jest długością toru, po którym ciało się porusza między dwoma punktami,
- w omawianym przykładzie całkowita droga jest sumą długości wektorów przemieszczeń składowych, czyli

$$s_{\text{całk}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 2 \text{ m} + 4 \text{ m} = 6 \text{ m}$$

Ruch prostoliniowy

Prędkość średnia

- każdemu położeniu ciała przyporządkujemy odpowiadający mu czas,
- jeżeli nie interesują nas szczegóły ruchu w danym momencie, najczęściej wystarczy podać **średnią prędkość**, aby określić jak szybko ciało się porusza,
- jest to wielkość wektorowa, którą wyraża iloraz całkowitego przemieszczenia między dwoma punktami i czasu, w jakim to przemieszczenie nastąpiło,
- ten czas nazywamy całkowitym czasem ruchu i oznaczamy Δt

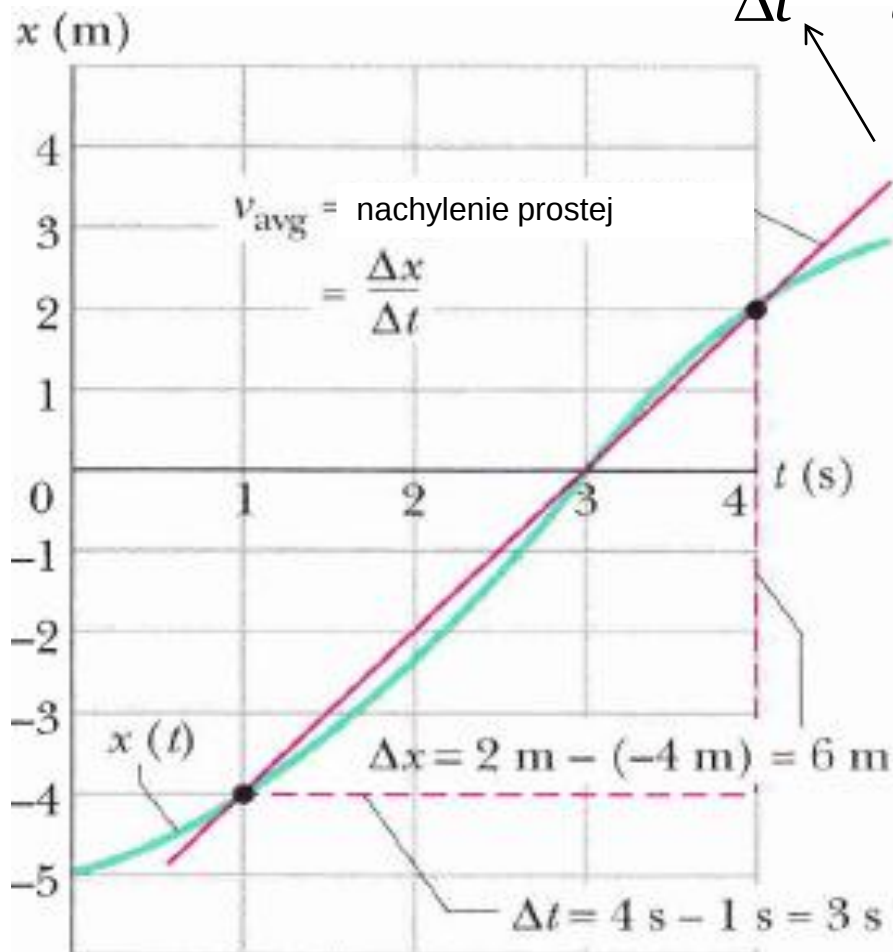
Ruch prostoliniowy

Prędkość średnia

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

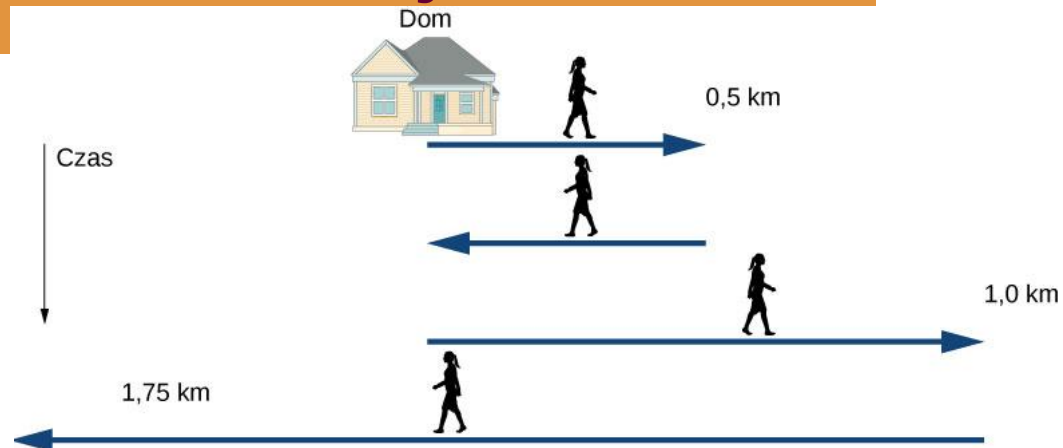
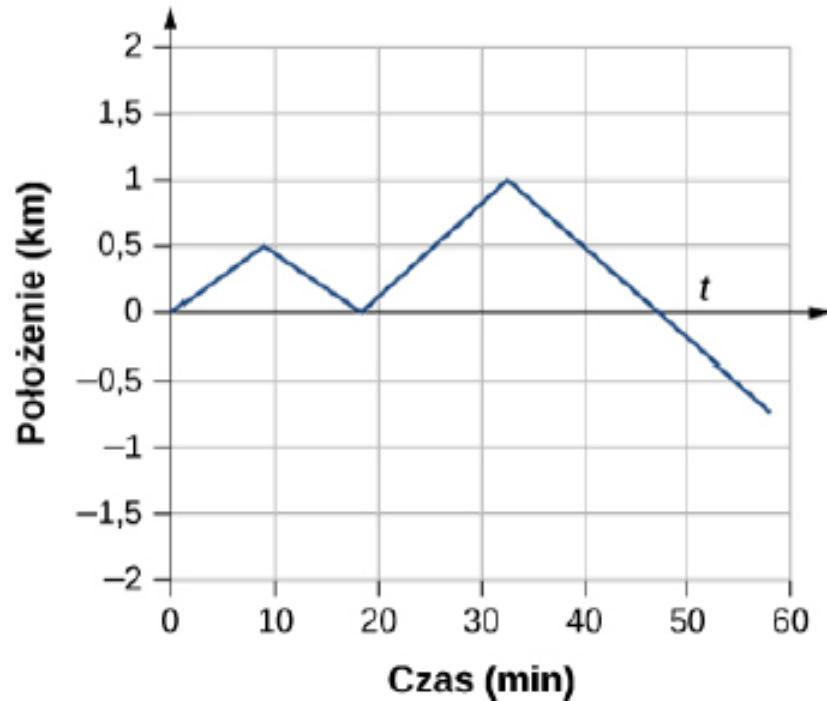
całkowite przemieszczenie ciała

całkowity czas ruchu pomiędzy dwoma punktami



Ruch prostoliniowy

Prędkość średnia



Czas t_i (min)	Położenie x_i (km)	Przemieszczenie Δx_i (km)
$t_0 = 0$	$x_0 = 0$	$\Delta x_0 = 0$
$t_1 = 9$	$x_1 = 0,5$	$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 0,5$
$t_2 = 18$	$x_2 = 0$	$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = -0,5$
$t_3 = 33$	$x_3 = 1,0$	$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = 1,0$
$t_4 = 58$	$x_4 = -0,75$	$\Delta x_4 = x_4 - x_3 = -1,75$

$$\sum_i \Delta x_i = 0,5 \text{ km} - 0,5 \text{ km} + 1,0 \text{ km} - 1,75 \text{ km} = -0,75 \text{ km}$$

$$\text{Prędkość średnia} = \frac{\text{Całkowite przemieszczenie}}{\text{Całkowity czas}} = \bar{v} = \frac{-0,75 \text{ km}}{58 \text{ min}} = -0,013 \frac{\text{km}}{\text{min}}$$

$$s_{\text{całk}} = \sum_i |\Delta x_i| = 0,5 \text{ km} + 0,5 \text{ km} + 1,0 \text{ km} + 1,75 \text{ km} = 3,75 \text{ km}$$

Ruch prostoliniowy

Prędkość chwilowa

- wielkość mówiąca o tym, jak szybko ciało porusza się wzdłuż swojego toru ruchu w danym momencie, nazywa się prędkością chwilową (często po prostu prędkością),

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

- prędkość chwilowa jest równa prędkości średniej w granicy czasu zdążającego do zera lub
- jest to pochodna położenia x po czasie t ,

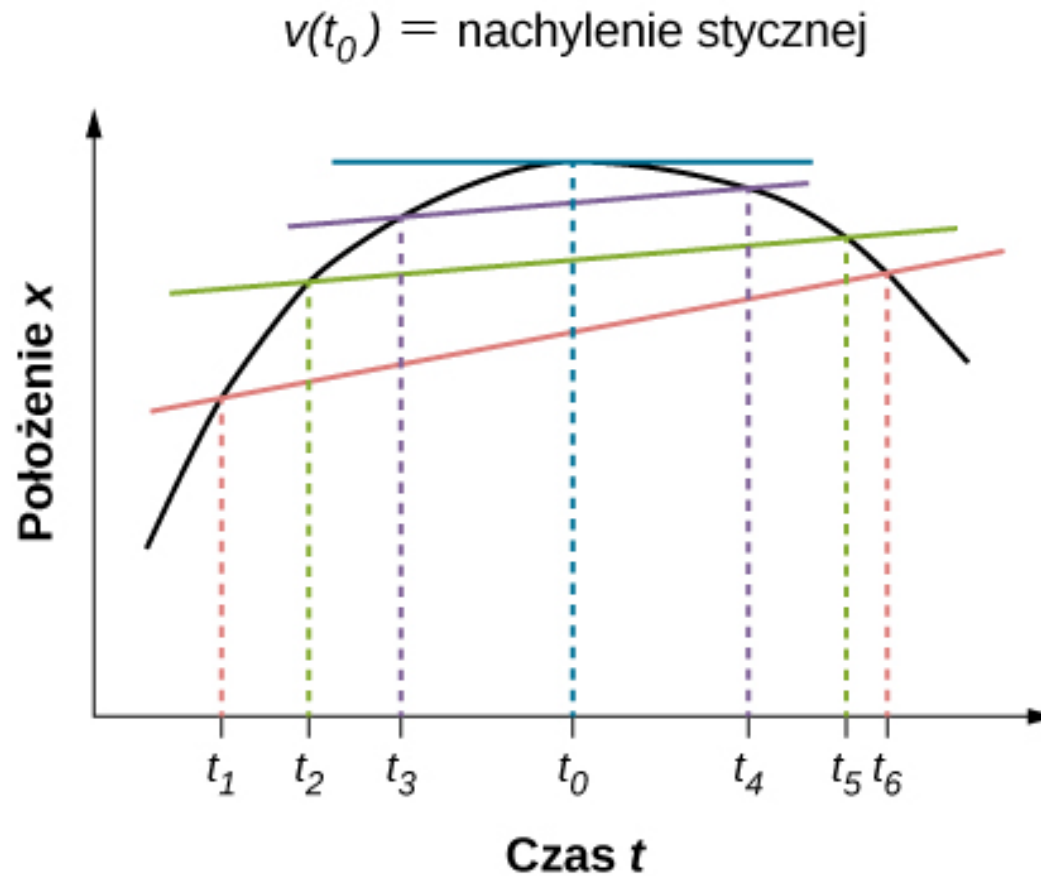
$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

- gdy $x(t) = At^n$

$$\frac{dx(t)}{dt} = nAt^{n-1}$$

Ruch prostoliniowy

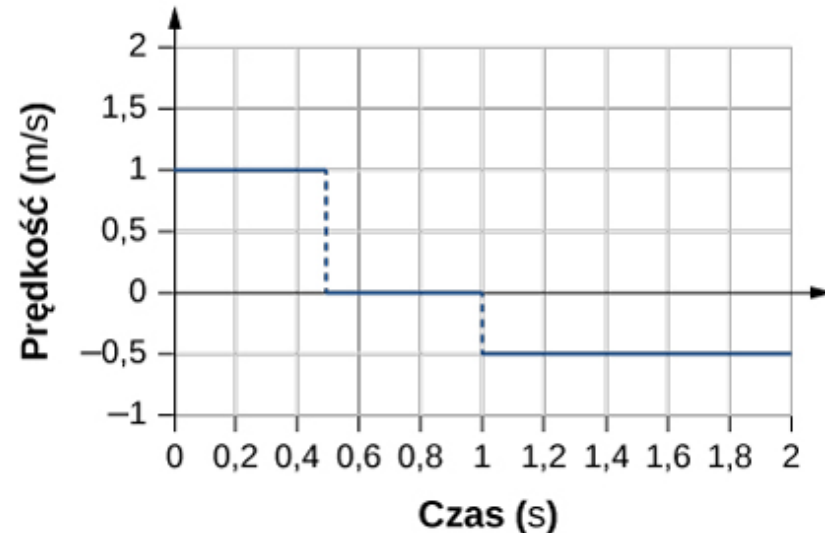
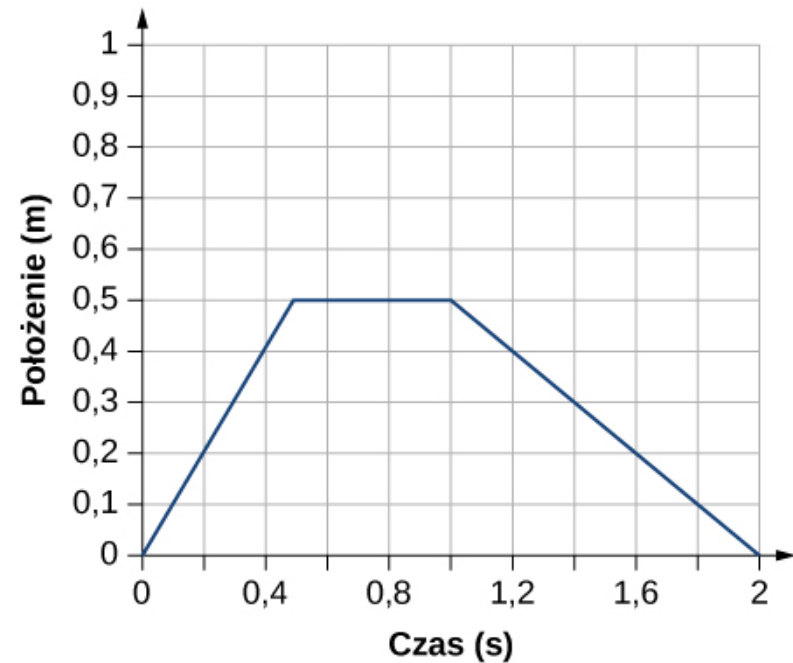
Prędkość chwilowa



Ruch prostoliniowy

Prędkość chwilowa

Położenie w funkcji czasu



$$\bar{v} = \Delta x / \Delta t = (0,5 \text{ m} - 0,0 \text{ m}) / (0,5 \text{ s} - 0,0 \text{ s}) = 1,0 \text{ m/s}$$

$$\bar{v} = \Delta x / \Delta t = (0,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m}) / (1,0 \text{ s} - 0,5 \text{ s}) = 0,0 \text{ m/s}$$

$$\bar{v} = \Delta x / \Delta t = (0,0 \text{ m} - 0,5 \text{ m}) / (2,0 \text{ s} - 1,0 \text{ s}) = -0,5 \text{ m/s}$$

Ruch prostoliniowy

Szybkość i szybkość średnia

$$\text{Szybkość średnia} = v_{\text{śr}} = \frac{\text{Całkowita droga}}{\text{Całkowity czas}} = \frac{s_{\text{całk}}}{t_{\text{całk}}}$$

- w codziennym życiu nie rozróżniamy pojęć prędkość oraz szybkość i używamy ich naprzemiennie,
- w fizyce jednak nie są to te same wielkości i znacząco się różnią,
- **prędkość jest wektorem**,
- **szybkość jest skalar**em, nie ma kierunku ani zwrotu,
- można też obliczyć chwilową szybkość, jako długość prędkości chwilowej:

$$\text{Szybkość} = |v(t)|$$

Ruch prostoliniowy

Prędkość chwilowa i średnia

- Położenie cząstki dane jest funkcją

$$x(t) = (3,0t + 0,5t^3) \text{ m}$$

- a. obliczyć prędkość chwilową w chwili $t = 2 \text{ s}$,
- b. obliczyć prędkość średnią pomiędzy 1 a 3 s ruchu.

$$\frac{dx(t)}{dt} = nAt^{n-1}$$

Ruch prostoliniowy

Przyspieszenie średnie i chwilowe

- przyspieszać - rozpędzać się, zwiększać szybkość,
- im większe jest przyspieszenie, tym większa jest zmiana prędkości w danym przedziale czasu,
- przyspieszenie średnie jest zmianą wektora prędkości w pewnym przedziale czasu, w ruchu po linii prostej zapiszemy:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_k - v_0}{t_k - t_0}$$

- przyspieszenie jest wektorem, którego kierunek jest równoległy do kierunku zmiany wektora prędkości,
- przyspieszenie jest zmianą wartości i/lub kierunku prędkości w czasie.



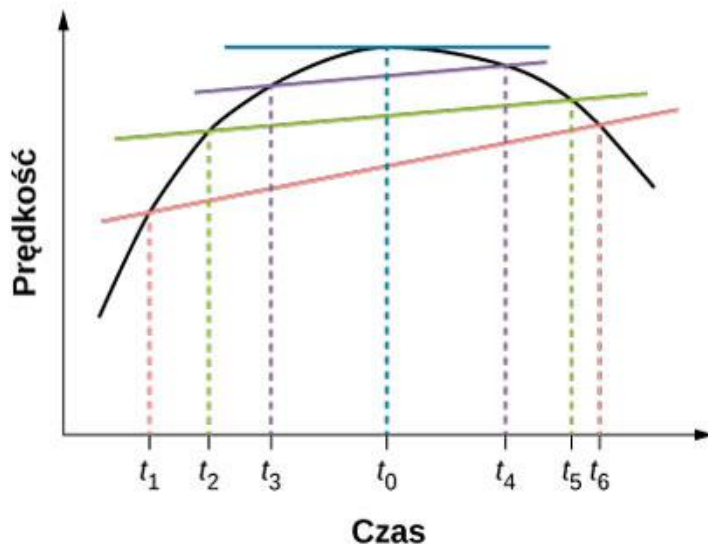
Ruch prostoliniowy

Przyspieszenie średnie i chwilowe

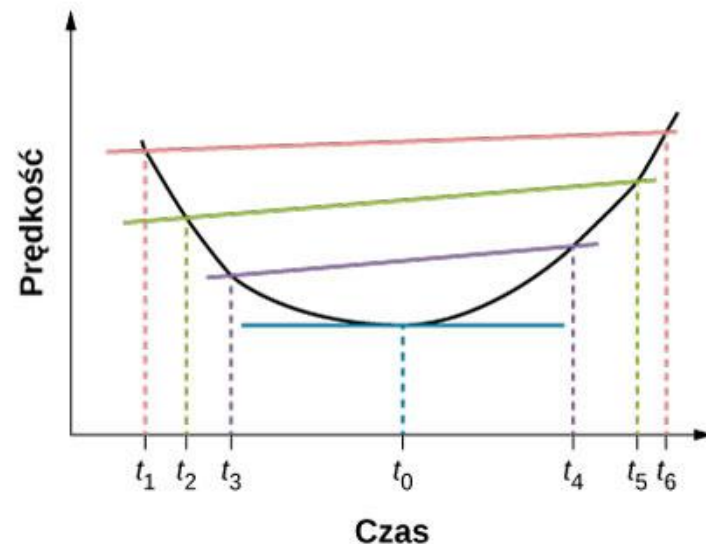
- przyspieszenie chwilowe a , inaczej przyspieszenie w danej chwili czasu, definiujemy analogicznie do prędkości chwilowej,
- obliczamy średnią prędkość między dwoma punktami oddległymi w czasie o Δt i żądamy, by zdążyło do zera. W efekcie otrzymujemy pochodną po czasie funkcji prędkości $v(t)$,

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$

$a(t_0) = \text{nachylenie stycznej}$

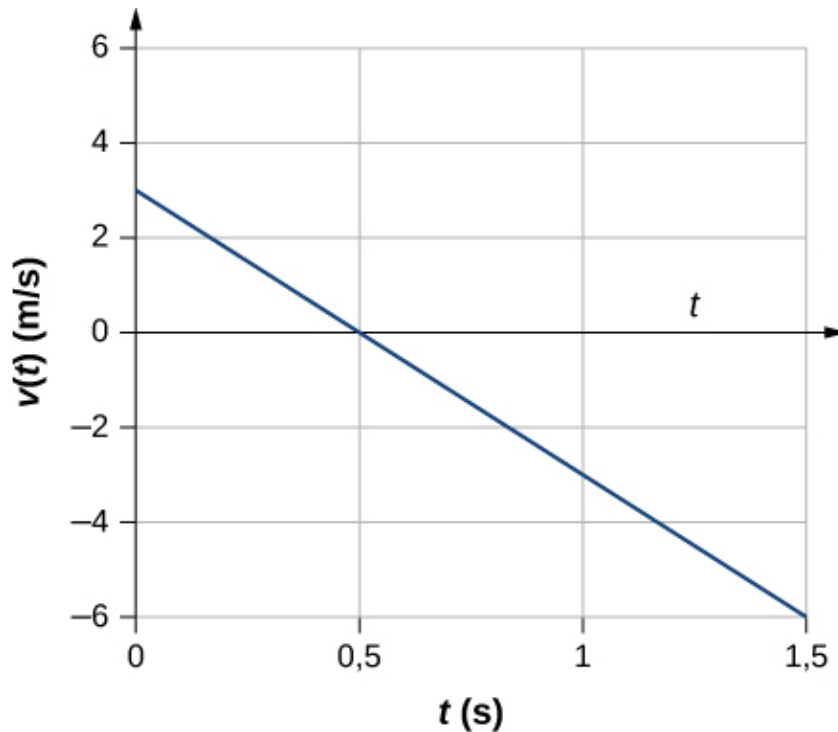


$a(t_0) = \text{nachylenie stycznej}$

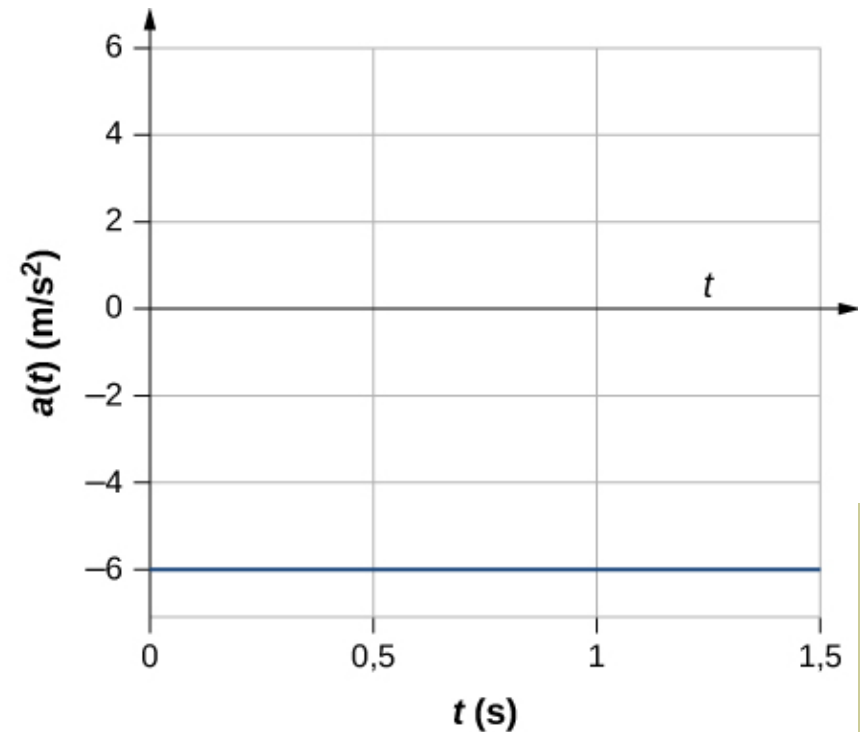


Ruch prostoliniowy

Przyspieszenie średnie i chwilowe



(a) Prędkość



(b) Przyspieszenie

Ruch prostoliniowy

Ruch ze stałym przyspieszeniem

$$a = \text{const}$$

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

pamiętajmy, że przyspieszenie jest stałe, ***a*** = const

Ruch prostoliniowy

Przyspieszenie grawitacyjne

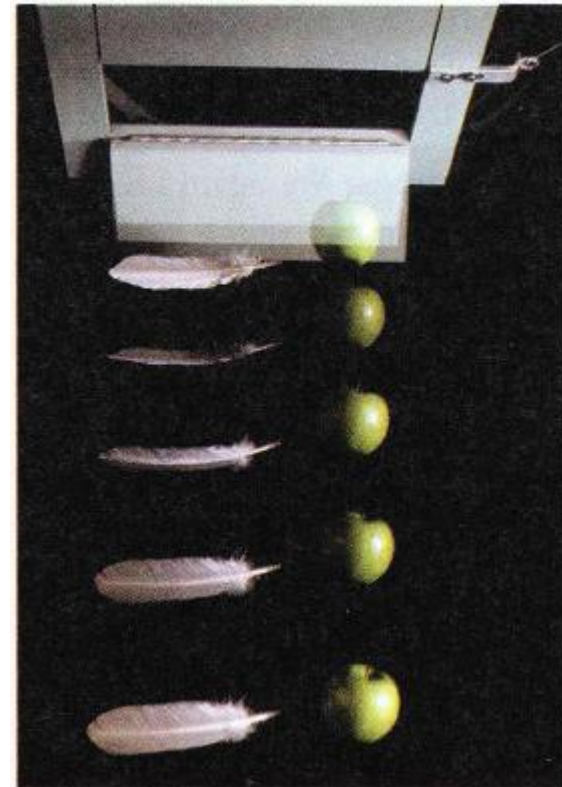
Gdy rzucimy ciało do góry, to po pewnym czasie zacznie ono spadać. Tak podczas wznoszenia jak i opadania ciało porusza się z przyspieszeniem, które nazywamy

przyspieszeniem ziemskim.

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Nie zależy ono od własności przedmiotu:
masa, kształt, itd.

– gdy zaniedbamy wpływ powietrza!



Ruch prostoliniowy

Ruch jednowymiarowy w polu grawitacyjnym

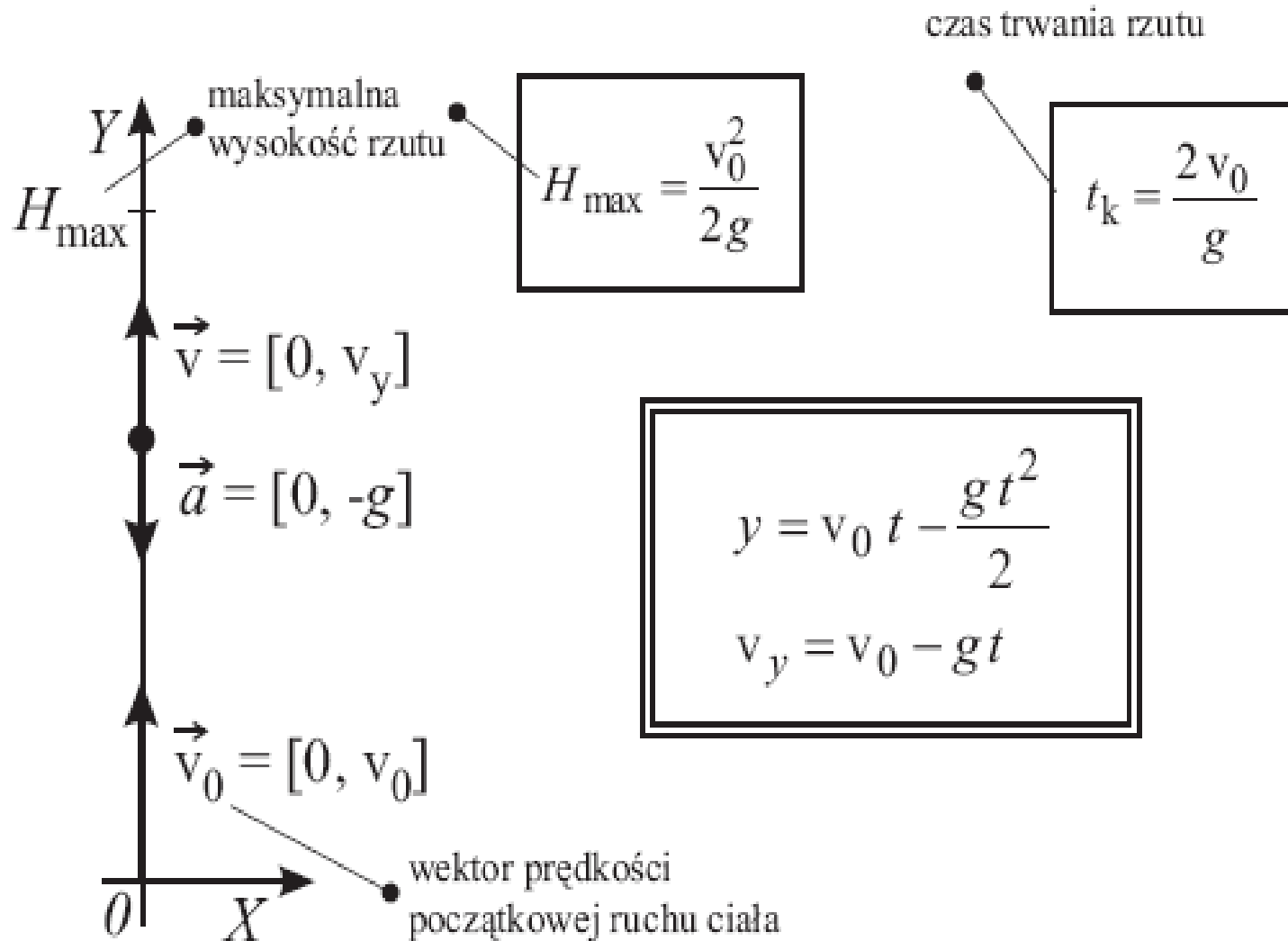
- przyjmujemy, że ruch odbywa się wzdłuż osi OY i przyspieszenie wynosi $-g$ (dodatni kierunek jest zdefiniowany w górę),
- równania ruchu w spadku swobodnym i rzucie pionowym

$$v = v_0 - gt,$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

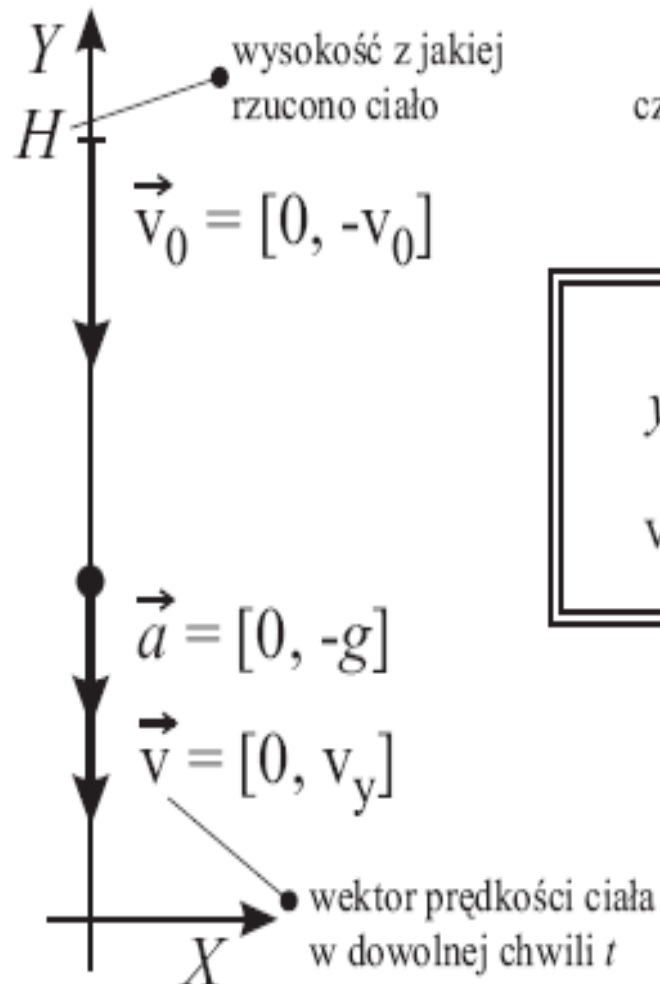
Ruch prostoliniowy

Rzut pionowy w górę



Ruch prostoliniowy

Rzut pionowy w dół



wysokość z jakiej
rzucono ciało

$$\vec{v}_0 = [0, -v_0]$$

$$\vec{a} = [0, -g]$$

$$\vec{v} = [0, v_y]$$

wektor prędkości ciała
w dowolnej chwili t

czas trwania rzutu

$$t_k = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2H}{g}} - \frac{v_0}{g}$$

$$y = H - v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_y = -v_0 - gt$$

wartość prędkości
końcowej

$$v_k = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

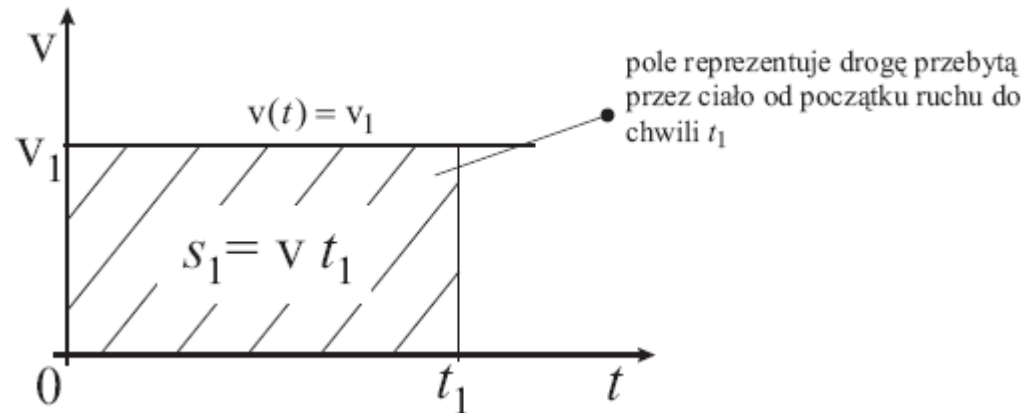
Ruch prostoliniowy

Wyznaczanie równań ruchu metodą całkowania

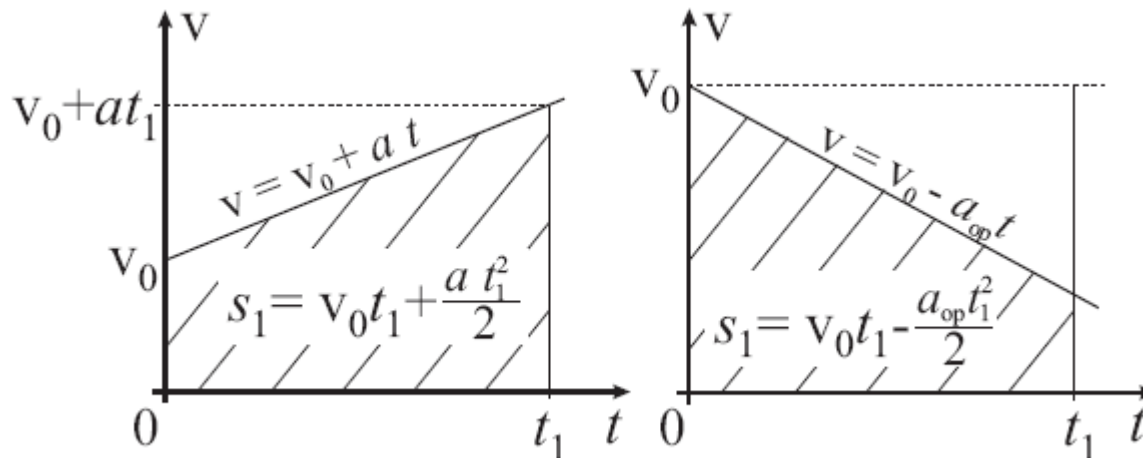
Ruch prostoliniowy

Graficzne wyznaczanie drogi

Ruch jednostajny



Ruch jednostajnie zmienny



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

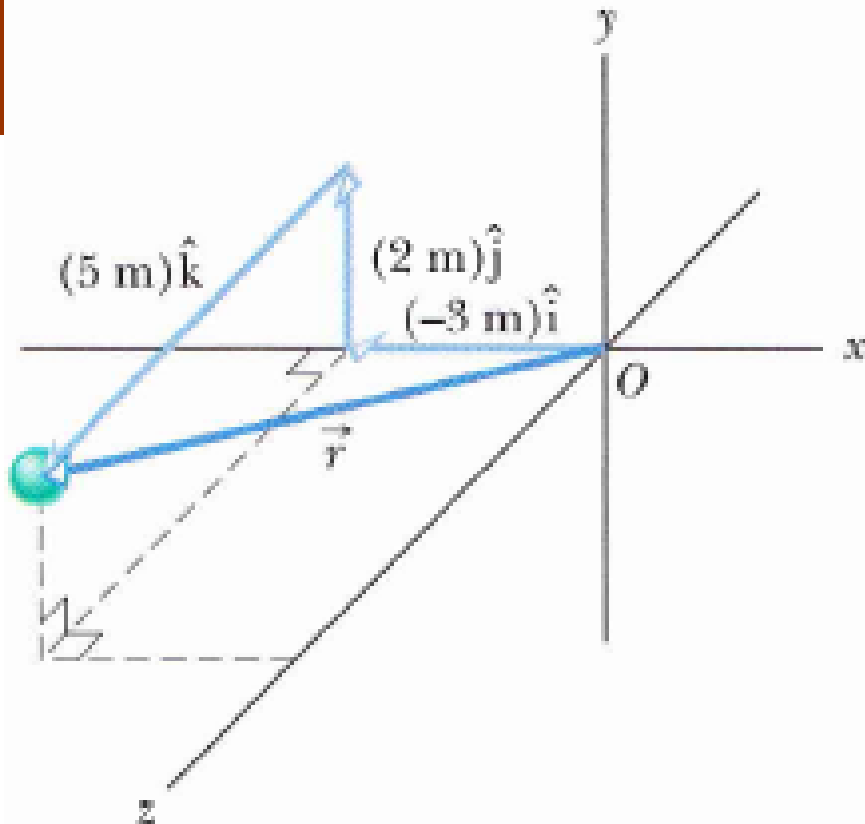
■ Założenia:

- tor ruchu nie musi być linią prostą,
- ciągle interesuje nas sam ruch i jego zmiany a nie ich przyczyny,
- poruszające się ciało traktujemy jak obiekt punktowy, czyli obdarzony masą lecz bez rozmiaru

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Położenie

Wektor położenia (wektor wodzący) – wektor łączący punkt, w którym znajduje się cząstka z punktem odniesienia (np. początek układu współrzędnych)



$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

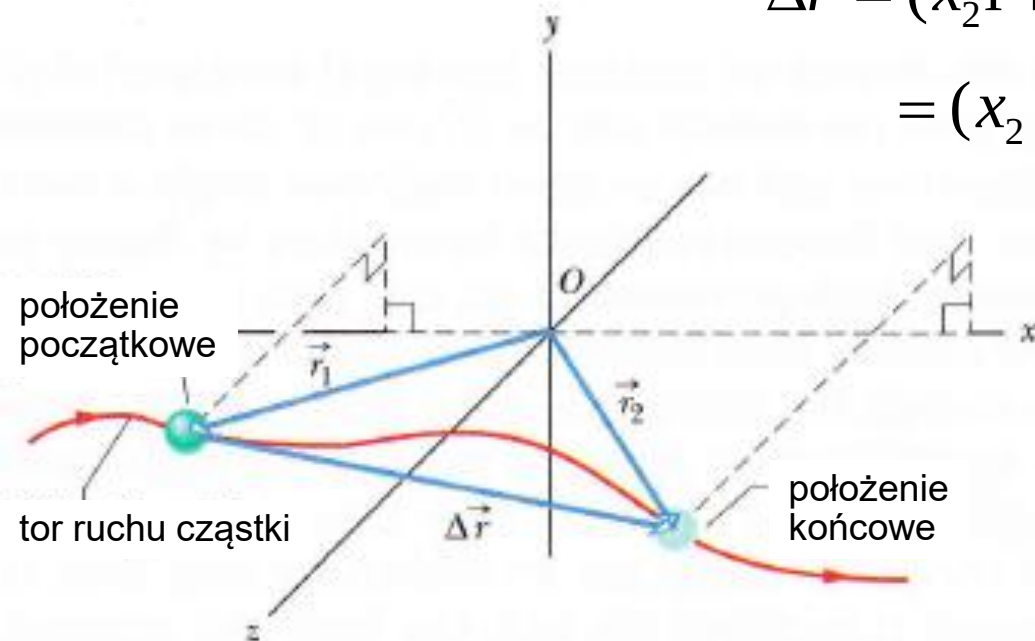
Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Premieszczenie

Gdy wektory położenia cząstki w pewnym przedziale czasu zmienia się od $\vec{r}_1$ do $\vec{r}_2$, to przemieszczenie cząstki w tym przedziale czasu wynosi

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) = \\ &= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}\end{aligned}$$



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Wektor prędkości

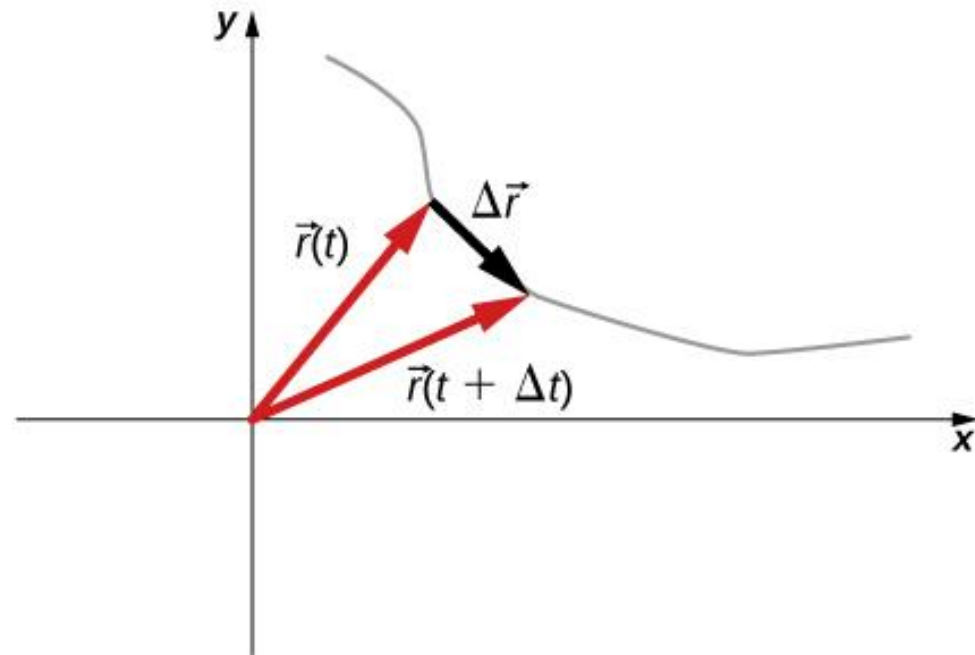
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$$

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt}$$

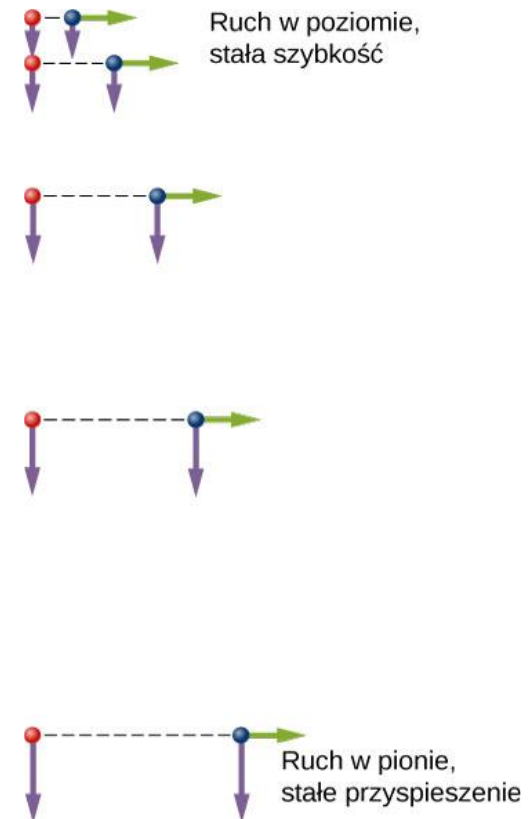
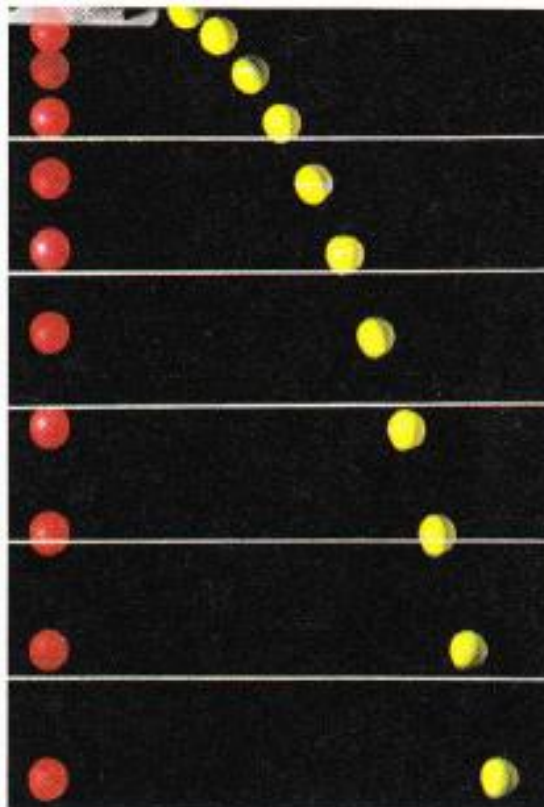
$$\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Niezależność ruchu w kierunkach prostopadłych

- W opisie kinematycznym ruchu składowe poziome i pionowe ruchu możemy traktować niezależnie.
- W wielu przypadkach ruch w kierunku poziomym nie wpływa na ruch w kierunku pionowym i odwrotnie.



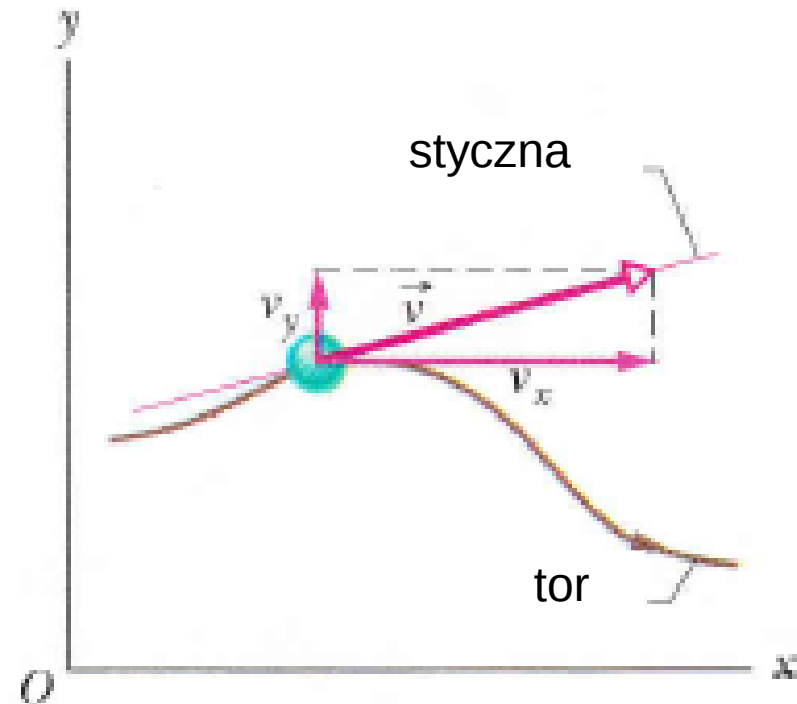
Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Przyspieszenie

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \hat{k}$$



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Przyspieszenie

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t$$

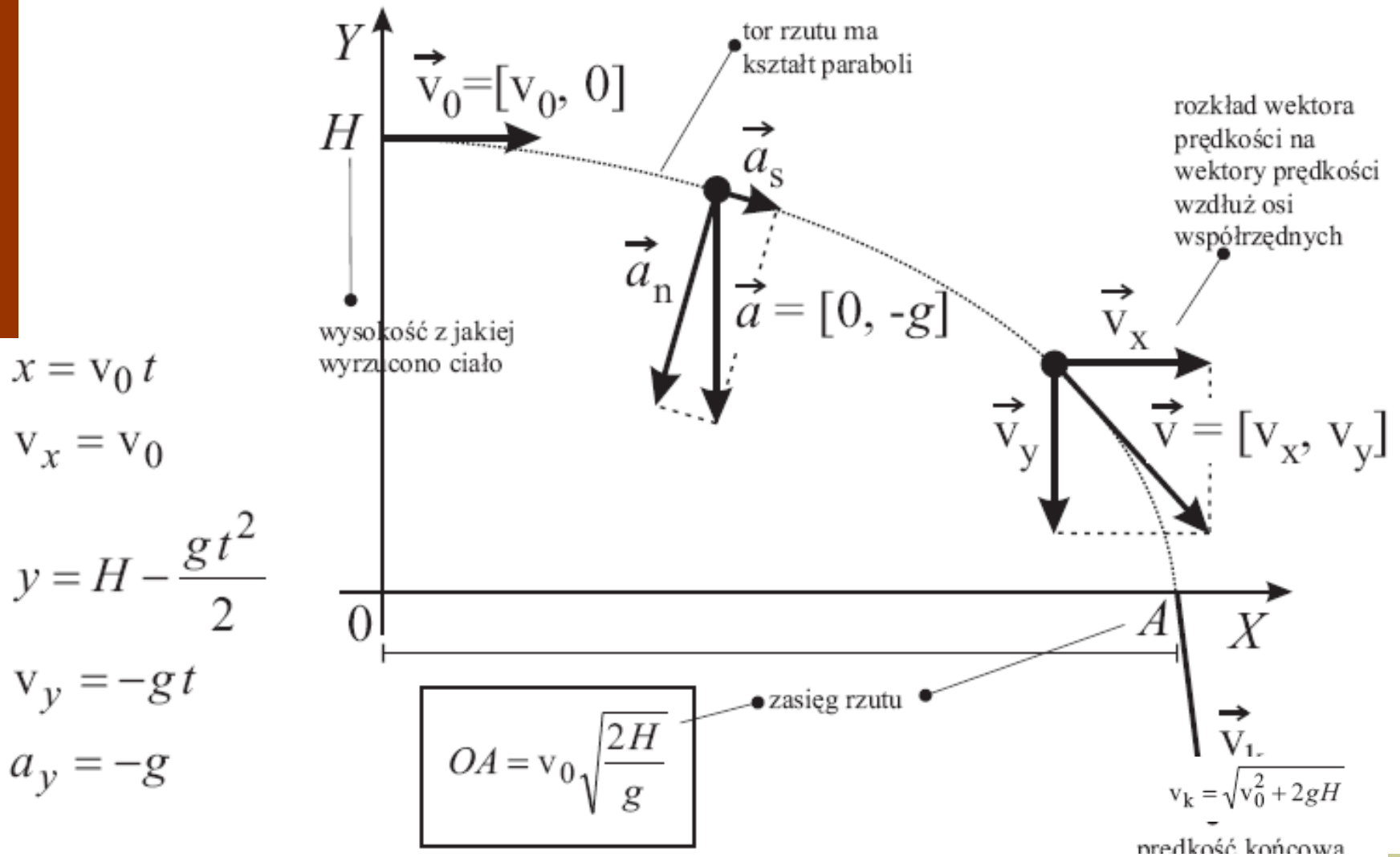
$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} \quad \text{oraz} \quad \vec{v}(t) = v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j}$$

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Rzut poziomy w polu grawitacyjnym



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Rzut poziomy w polu grawitacyjnym – obliczenia

■ **Rzut poziomy** jest złożeniem dwóch ruchów: jednostajnie zmiennego wzdłuż osi OY i jednostajnego wzdłuż osi OX . Zakładamy, że ciało zostało rzucone z wysokości H z prędkością początkową v_0 skierowaną poziomo. Z powyższego wynika, że ciało porusza się w kierunku OX ze stałą prędkością v_0 , a w kierunku OY ze stałym przyspieszeniem g . Współrzędne położenia ciała i jego prędkości w dowolnej chwili czasu t opisują równania:

$$\begin{cases} x = v_{0x} t = v_0 t \\ y = H + \frac{a_y t^2}{2} = H - \frac{g t^2}{2} \end{cases} \quad \text{ i } \quad \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \\ v_y = a_y t = -g t \end{cases}$$

Czas trwania rzutu t_k wyznaczamy z warunku $y = 0$, więc

$$0 = H - \frac{g t_k^2}{2}, \quad \text{ stąd } \quad t_k = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Wiedząc, ile będzie trwał ruch ciała, możemy wyznaczyć zasięg rzutu: $OA = v_0 t_k = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Wartość prędkości ciała w dowolnej chwili czasu wynosi: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (g t)^2}$, natomiast prędkość końcowa ciała (w chwili uderzenia o ziemię) wyraża się zależnością:

$$v_k = \sqrt{v_0^2 + (g t_k)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gH}.$$

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Rzut ukośny w polu grawitacyjnym

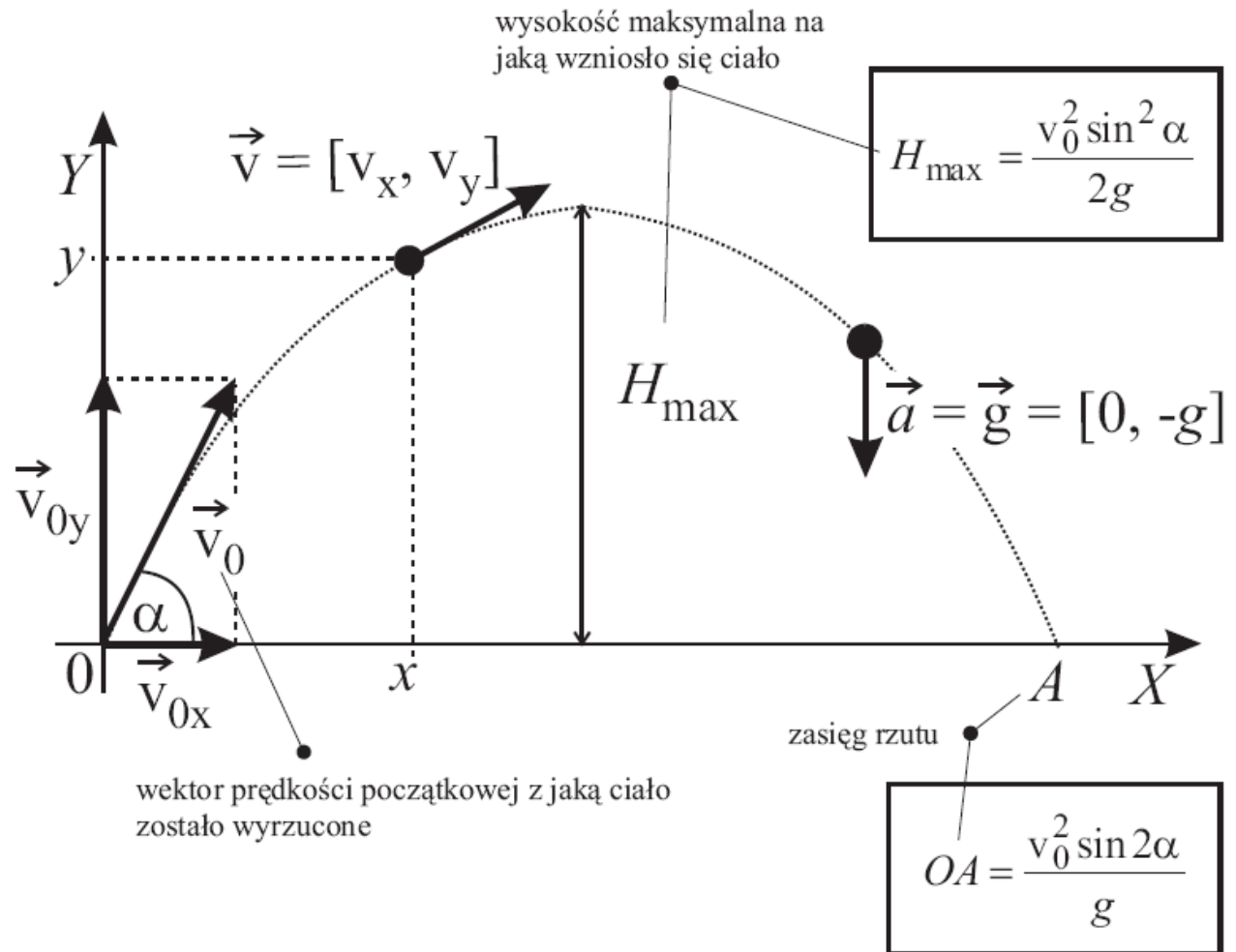
$$x = v_0 t \cos \alpha$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t$$

$$a_y = -g$$



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Rzut ukośny w polu grawitacyjnym - obliczenia

$$\begin{aligned}x &= v_{0x} t = v_0 t \cos \alpha & y &= v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2} = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2} \\v_x &= v_{0x} = v_0 \cos \alpha & i & \quad v_y = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \alpha - g t \\a_x &= 0 & a_y &= -g\end{aligned}$$

Równania te pozwalają wyznaczyć parametry rzutu ukośnego.

A) Czas trwania rzutu otrzymujemy podstawiając $y=0$, czyli

$$0 = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}, \text{ skąd } t=0 \text{ (chwila początkowa) lub } t=t_k = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \text{ (chwila upadku ciała).}$$

B) Zasięg rzutu otrzymamy podstawiając do wzoru $x = v_0 t \cos \alpha$ czas $t = t_k$, czyli

$$OA = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

C) Maksymalna wysokość na jaką wzniesie się ciało $H_{\max} = y$ gdy $v_y = 0$. Z równania

$$0 = v_0 \sin \alpha - g t \text{ wyznaczamy czas wznoszenia się ciała } t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \text{ i podstawiamy do wzoru}$$

$$H_{\max} = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Rzut ukośny w polu grawitacyjnym – tor ruchu

■ **Równanie toru** wyznaczamy podobnie jak w rzucie poziomym z równań $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Z pierwszego wyznaczamy czas $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ i wstawiając do drugiego otrzymujemy

$$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2,$$

czyli

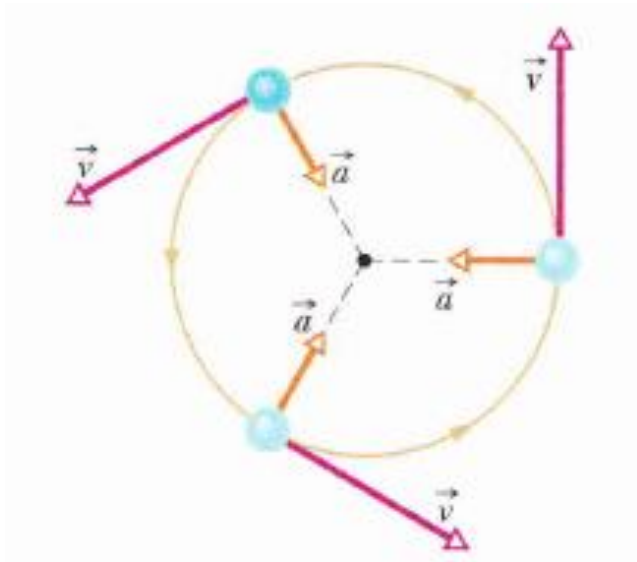
$$y = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Jest to również równanie paraboli skierowanej ramionami w dół, której maksimum jest dla $x = \frac{OA}{2}$

Ruch po okręgu

Ruch jednostajny po okręgu

- ruch odbywa się po okręgu lub kołowym łuku z prędkością o stałej wartości,
- choć wartość prędkości się nie zmienia, ruch cząstki jest **ruchem przyspieszonym**



$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

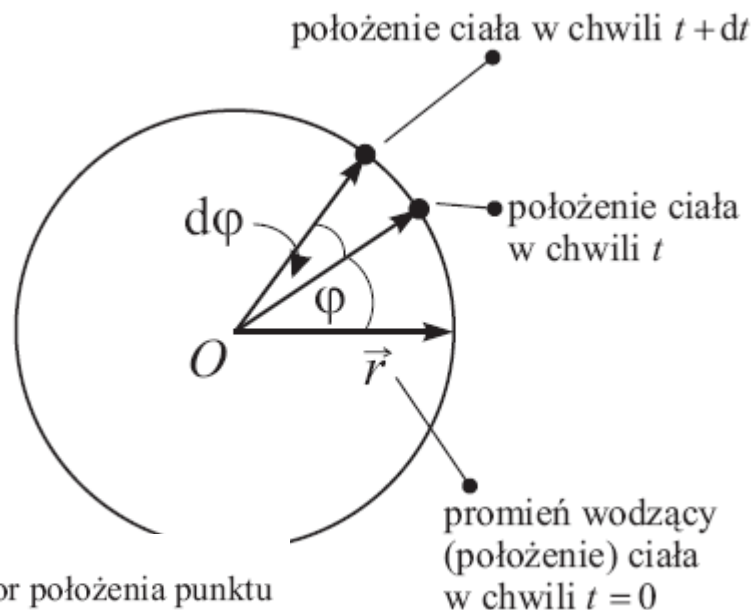
← promień okręgu

← okres obiegu

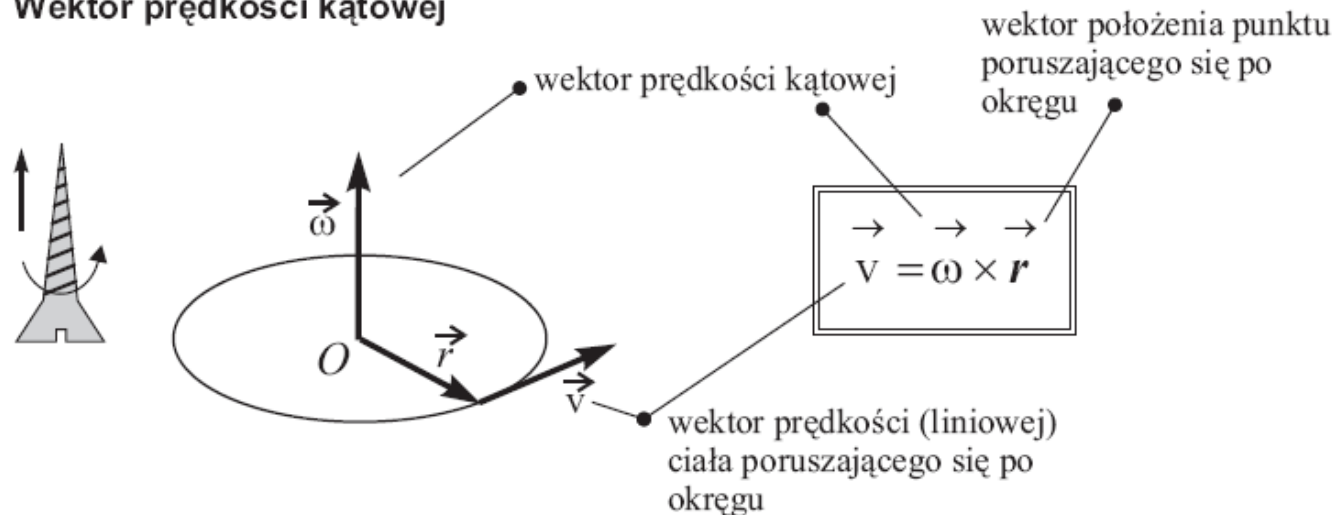
Ruch po okręgu

Wielkości kątowe – prędkość kątowa

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$



Wektor prędkości kątowej

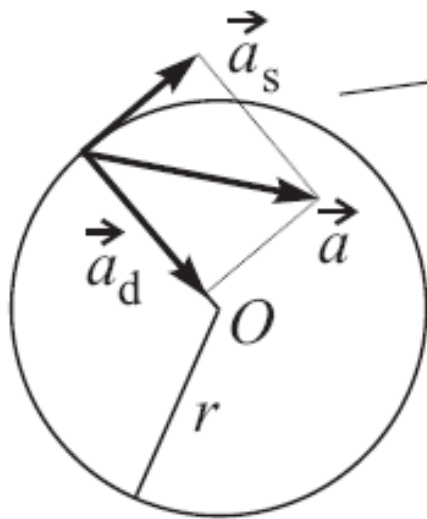


Ruch po okręgu

Wielkości kątowe – przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$a_s = \frac{dv}{dt}$$



rozkład wektora przyspieszenia całkowitego $\vec{a}$ na wektor przyspieszenia stycznego $\vec{a}_s$ i dośrodkowego $\vec{a}_d$

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_d$$

$$a_s = \varepsilon r$$

$$a_d = \omega^2 r$$

Ruch po okręgu

Przyspieszenie dośrodkowe (normalne)

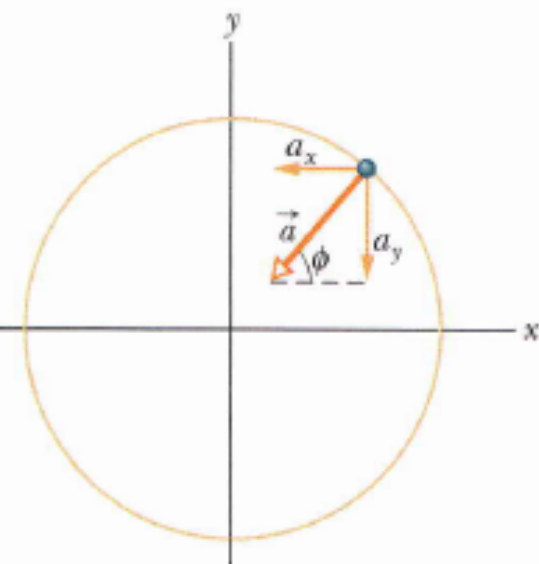
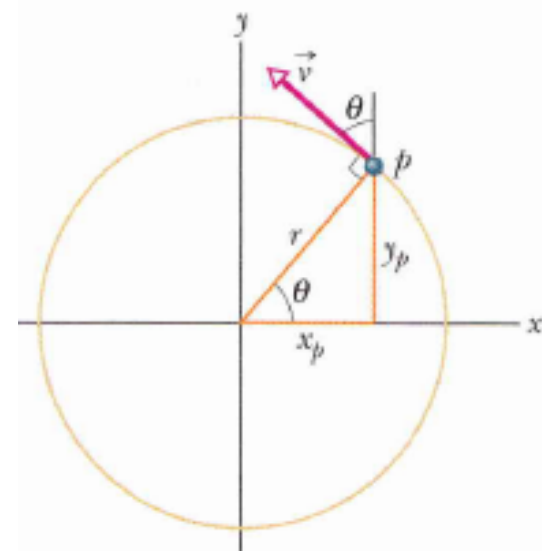
$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (-v \sin \theta) \hat{i} + (v \cos \theta) \hat{j}.$$

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r} \right) \hat{i} + \left(\frac{vx_p}{r} \right) \hat{j}.$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt} \right) \hat{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt} \right) \hat{j}.$$

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) \hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \sin \theta \right) \hat{j}.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$



Ruch po okręgu

Wielkości liniowe a kątowe

wielkości liniowe	wielkości kątowe
$a_s = \varepsilon R = \text{const}$ $a_{\text{dośr}} = \omega^2 R$ $a = \sqrt{a_s^2 + a_{\text{dośr}}^2}$ $v = v_0 + a_s t$ $s = v_0 t + \frac{a_s t^2}{2}$	$\varepsilon = \text{const}$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ $\alpha = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
ruch jednostajnie opóźniony po okręgu	
$a_{\text{ops}} = -a_s = \text{const} > 0$ $v = v_0 - a_{\text{ops}} t$ $s = v_0 t - \frac{a_{\text{ops}} t^2}{2}$	$\varepsilon_{\text{op}} = -\varepsilon = \text{const} > 0$ $\omega = \omega_0 - \varepsilon_{\text{op}} t$ $\alpha = \omega_0 t - \frac{\varepsilon_{\text{op}} t^2}{2}$

Dziękuję za uwagę!