

Fizyka 1B

Wykład 11

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

Katedra Fizyki Doświadczalnej

Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

Drgania

- Ruch harmoniczny
- Energia w ruchu harmonicznym
- Porównanie ruchu harmonicznego z ruchem jednostajnym po okręgu
- Wahadła
- Drgania tłumione
- Drgania wymuszone

Drgania

- Przy szarpnięciu struny gitary uzyskujemy trwający dość długo dźwięk o stałym tonie.
- Struna wykonuje drgania wokół położenia równowagi.
- Cykl jednego pełnego drgania rozpoczyna się w położeniu początkowym - struna przemieszcza się do jednego ze skrajnych położzeń, po czym wędruje do drugiego skrajnego położenia i wreszcie powraca do położenia początkowego, kończąc tym samym cykl.
- Ruch periodyczny (ang. *periodic motion*) definiujemy jako powtarzającą się zmianę położenia w regularnych odstępach czasu.

Drgania

Okres i częstotliwość drgań

- W ruchu periodycznym okresem T , nazywamy czas wykonania jednego pełnego drgania.
- Za jednostkę okresu przyjmujemy zazwyczaj sekundę (minutę, godzinę).
- Pojęciem ściśle związanym z okresem jest częstotliwość.
- Częstotliwość (ang. frequency) f , określa się jako liczbę zdarzeń na jednostkę czasu.
- Dla ruchu periodycznego częstotliwość to liczba drgań (oscylacji) w jednostce czasu.
- Zależność między częstotliwością i okresem jest następująca:

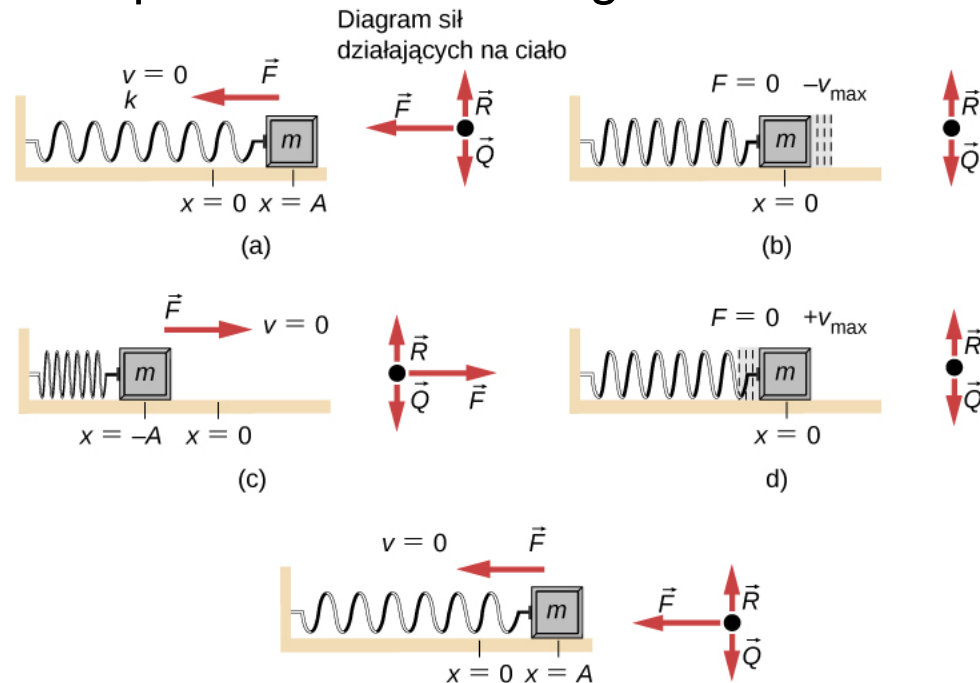
$$f = \frac{1}{T}$$

$$1 \text{ Hz} = 1 \frac{\text{cykl}}{\text{sekunda}} \text{ albo } 1 \text{ Hz} = \frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Drgania

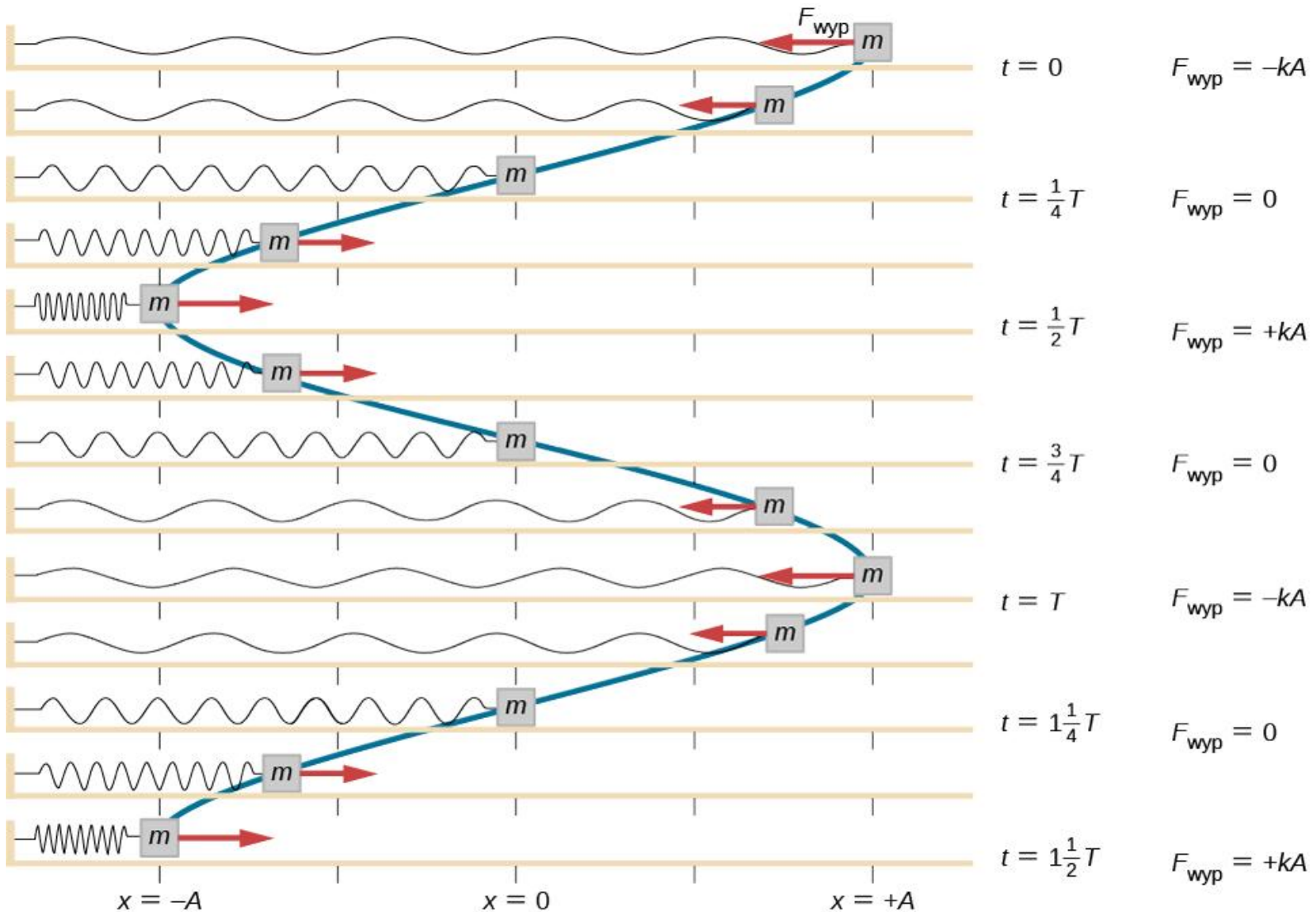
Ruch harmoniczny

- Bardzo powszechnym ruchem periodycznym jest ruch harmoniczny.
- Układem, który swobodnie oscyluje i wykonuje ruch harmoniczny, jest oscylator harmoniczny (ang. *harmonic oscillator*).
- W ruchu harmonicznym przyspieszenie układu, a więc i siła wypadkowa, są proporcjonalne do przemieszczenia i skierowane są w kierunku położenia równowagi.



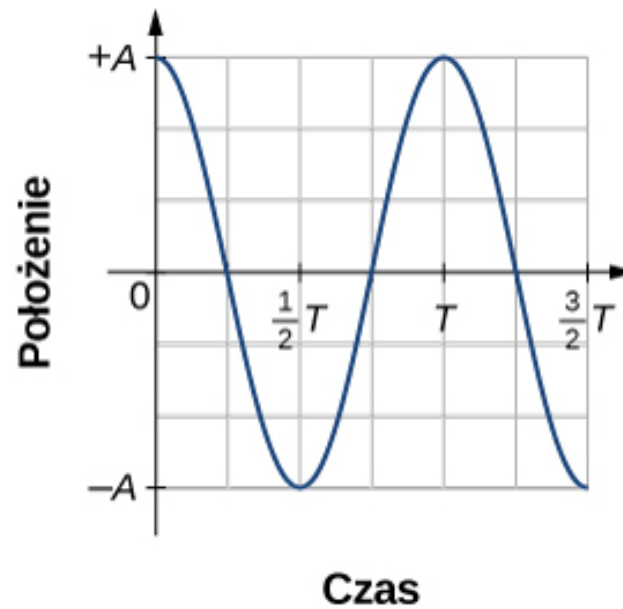
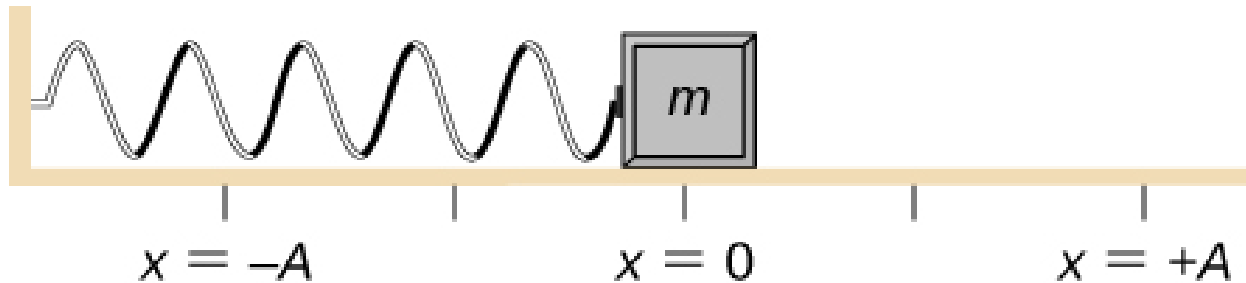
Drgania

Ruch harmoniczny



Drgania

Ruch harmoniczny



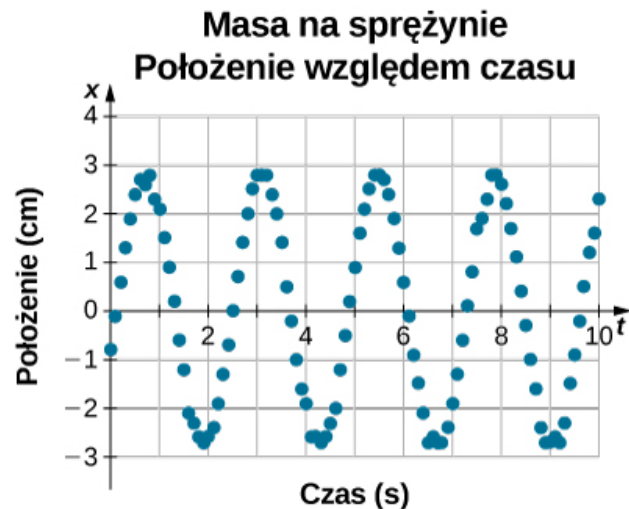
$$x(t) = A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t \right) = A \cos(\omega t)$$

Drgania

Ruch harmoniczny

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = A \cos(\omega t)$$

- A – amplituda, maksymalne przemieszczenie względem położenia równowagi,
- T – okres drgań,
- ω – częstość drgań $\omega = \frac{2\pi}{T}$.



$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

przesunięcie fazowe

Drgania

Ruch harmoniczny

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = A \cos(\omega t)$$

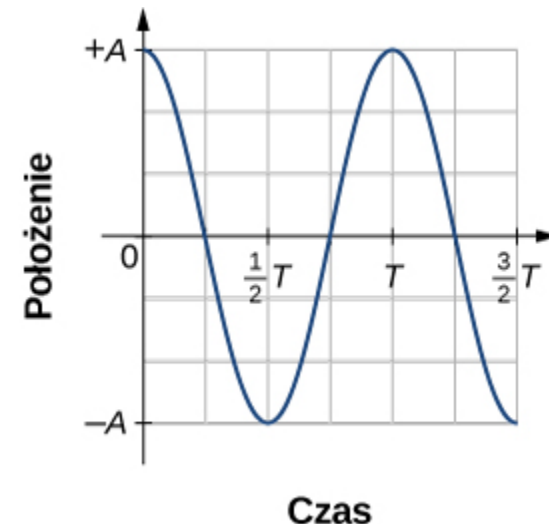
- prędkość

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A \cos(\omega t + \phi)) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

- przyspieszenie

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-A\omega \sin(\omega t + \phi)) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\v(t) &= -v_{\max} \sin(\omega t + \phi) \\a(t) &= -a_{\max} \cos(\omega t + \phi) \\x_{\max} &= A \\v_{\max} &= A\omega \\a_{\max} &= A\omega^2.\end{aligned}$$



Drgania

Ruch harmoniczny – masa na sprężynie

$$F_x = -kx$$

$$ma = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

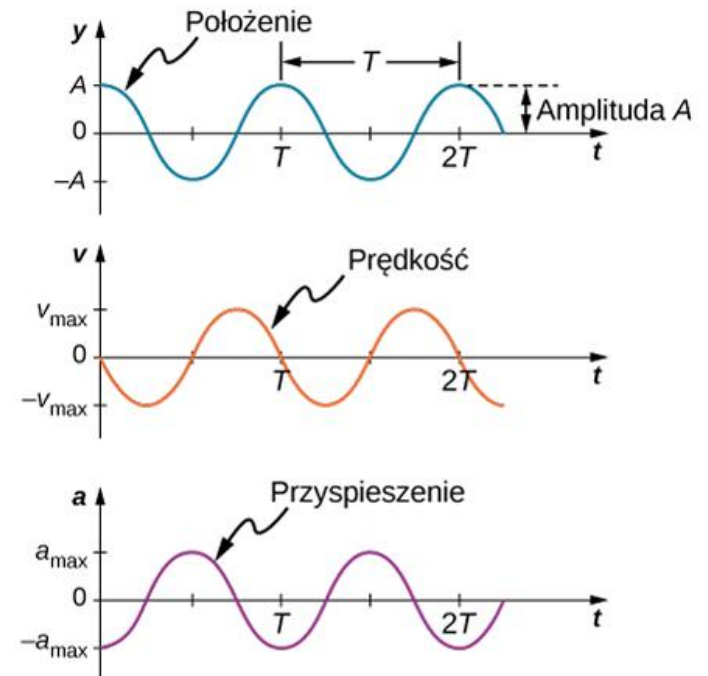
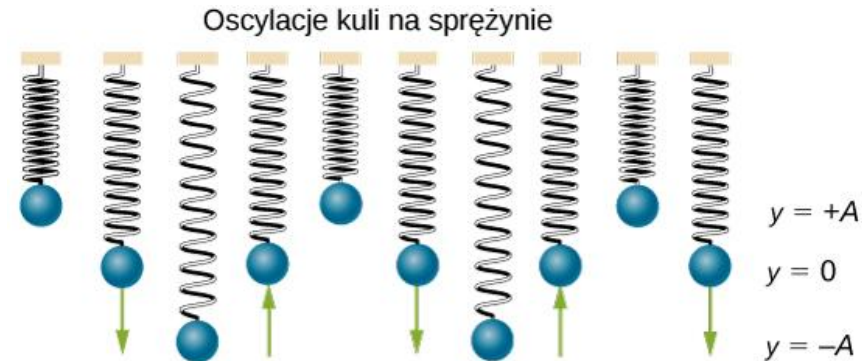
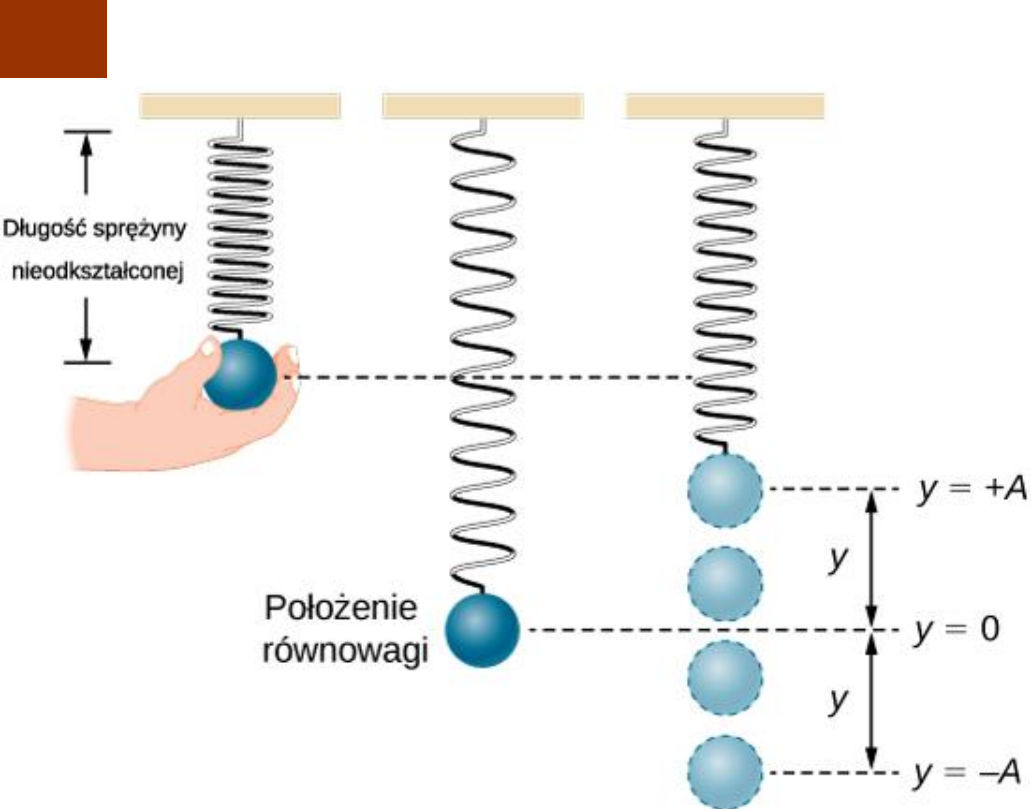
$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m}A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Drgania

Ruch harmoniczny – masa na sprężynie

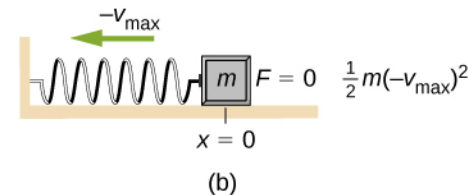
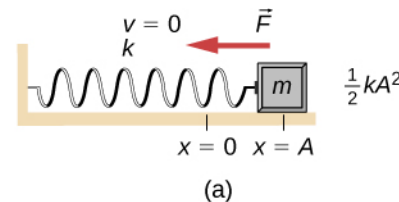


Drgania

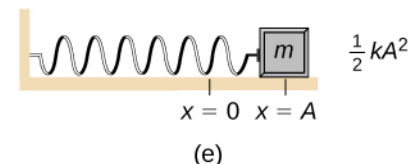
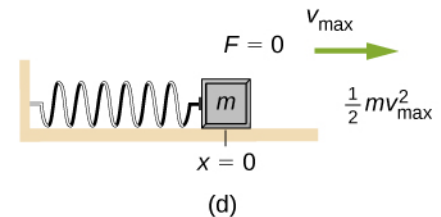
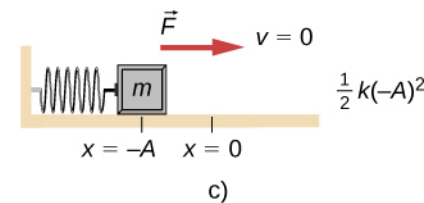
Energia w ruchu harmonicznym

- Siła sprężystości jest siłą zachowawczą – jeśli pominiemy straty energii (np. tarcie), to energia mechaniczna musi być stała (zachowana).
- Energię potencjalną stanowi energia zmagazynowana w sprężynie, gdy sprężyna jest odkształcona (rozciągnięta lub skrócona).

$$E_{\text{pspr}} = \frac{1}{2} kx^2$$



$$E_{\text{całkowita}} = E_{\text{pspr}} + E_k = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$$



Drgania

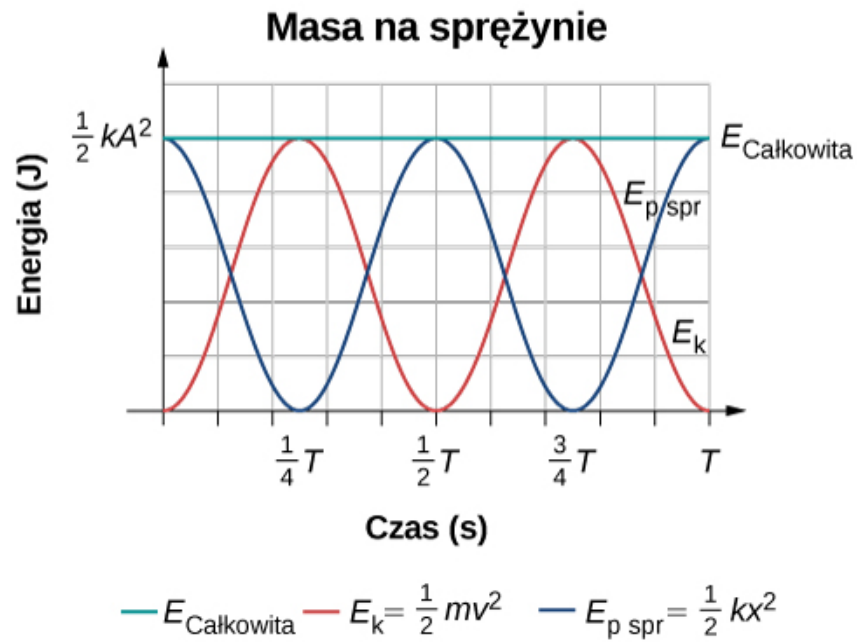
Energia w ruchu harmonicznym

$$E_{\text{całkowita}} = E_{\text{pspr}} + E_k = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\begin{aligned} E_{\text{całkowita}} &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}mA^2 \frac{k}{m} \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 (\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)) \\ &= \frac{1}{2}kA^2. \end{aligned}$$

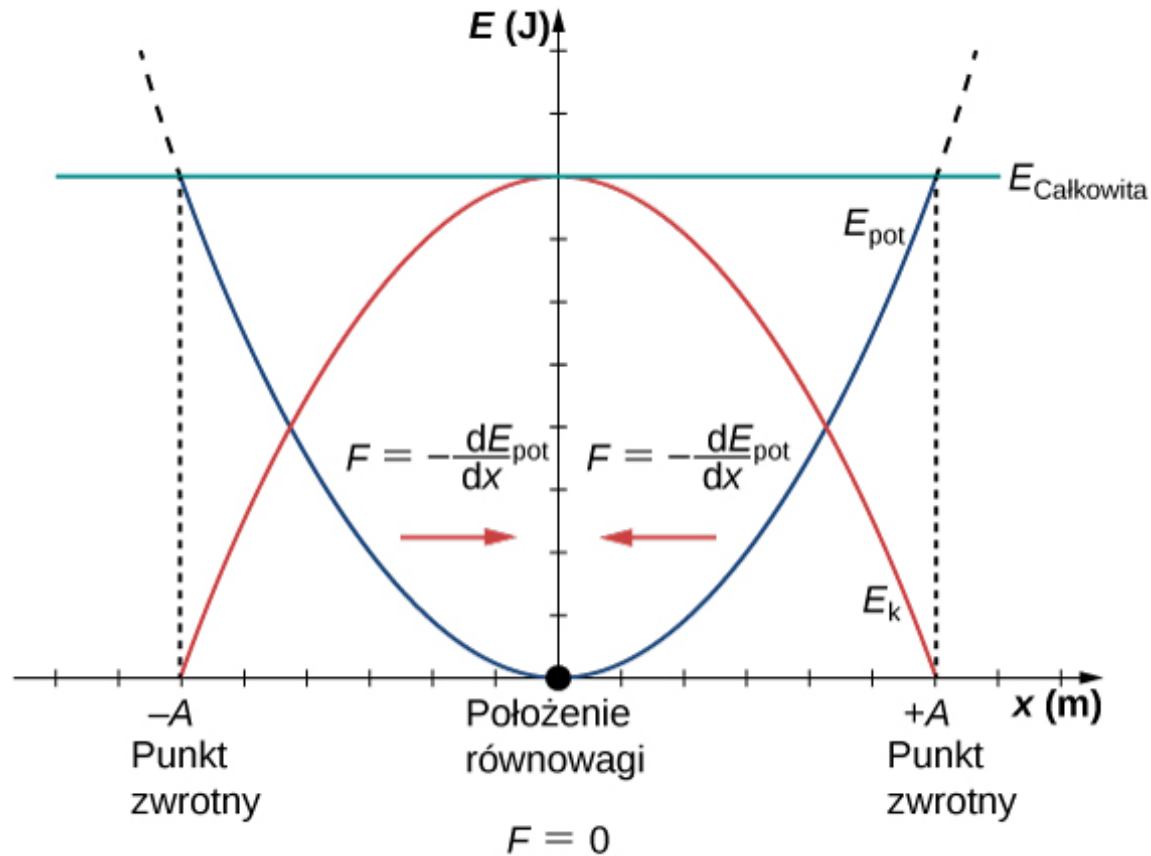
Drgania

Energia w ruchu harmonicznym



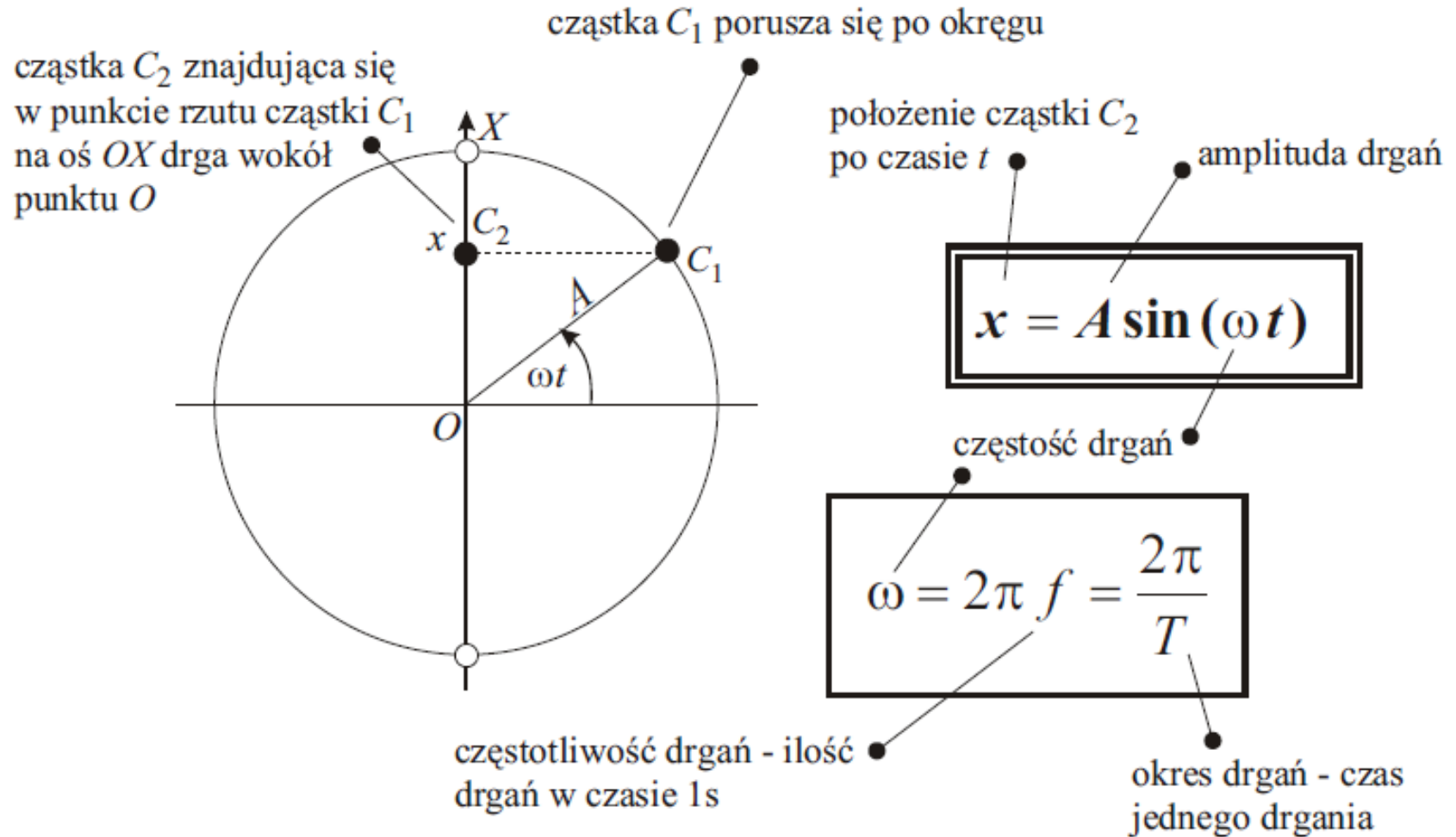
Drgania

Energia w ruchu harmonicznym



Drgania

Ruch harmoniczny a ruch po okręgu



Drgania

Wahadło matematyczne

- Wahadło matematyczne jest zdefiniowane jako masa punktowa (ciężarek) zawieszona na nierozciągliwej, nieważkiej nici o długości d .
- Jedynymi siłami działającymi na masę są siła grawitacji i naprężenie nici.

$$M = -dmg \sin \theta$$

$$I\varepsilon = -dmg \sin \theta$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -dmg \sin \theta$$

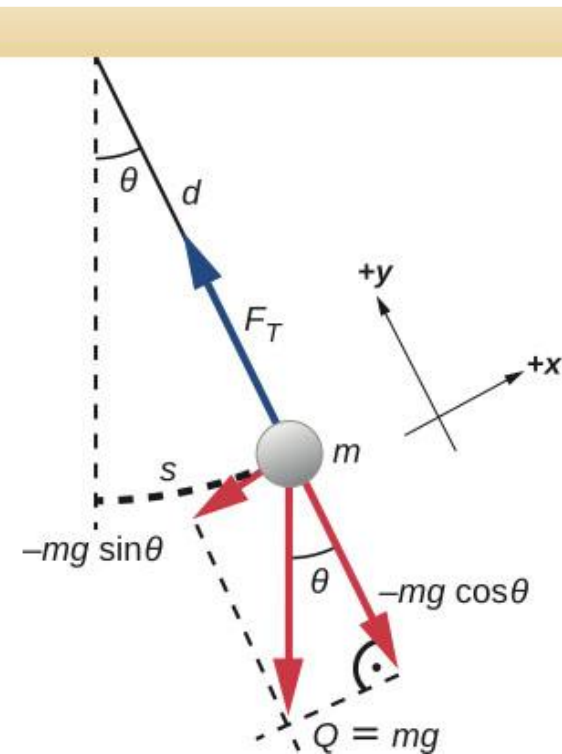
$$md^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -dmg \sin \theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{d} \sin \theta$$

$$\sin \theta \approx \theta \quad \theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}}$$



Drgania

Wahadło fizyczne

- Wahadło fizyczne to dowolne ciało, którego oscylacje są podobne do wahadła matematycznego, ale które nie może być opisane jako masa punktowa na nici, ponieważ jego równanie ruchu musi uwzględnić rozkład masy.

$$M = -dmg \sin \theta \quad \sin \theta \approx \theta$$

$$I\epsilon = -dmg\theta$$

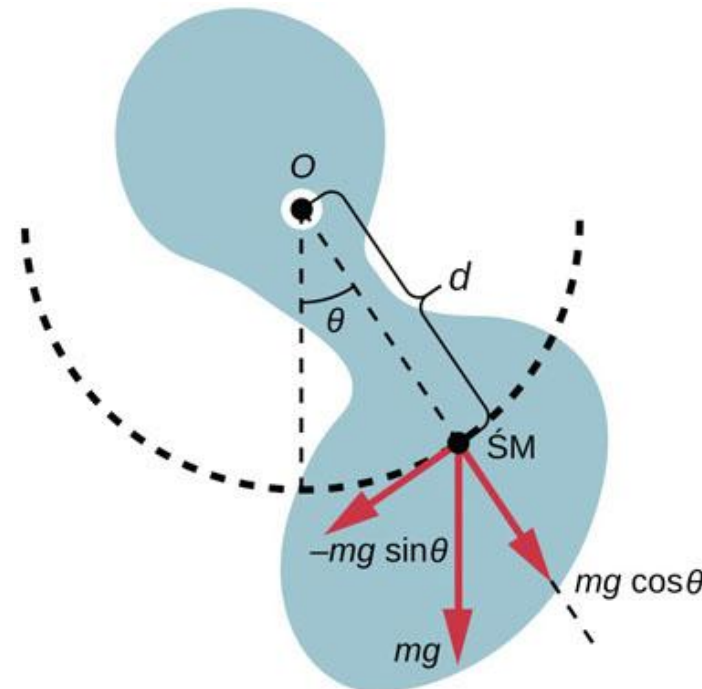
$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -dmg\theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I} \theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

$$\theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi)$$



Drgania

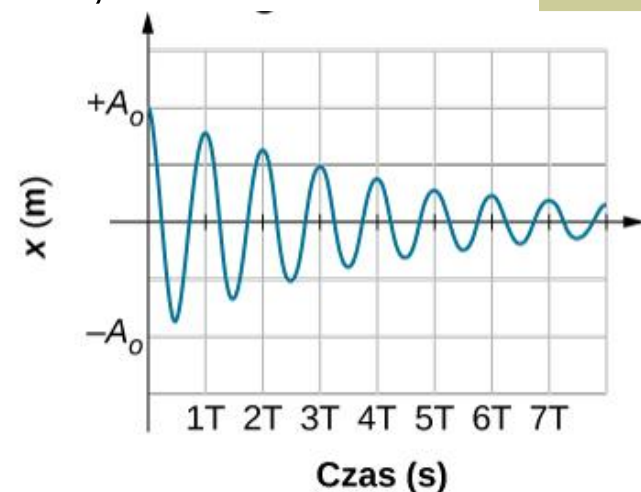
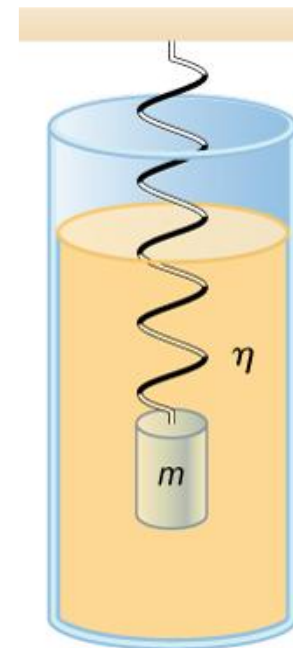
Drgania tłumione

- Drgania rzadko mają postać ruchu harmonicznego, ponieważ zwykle siła oporu tłumí drgania, co przy braku siły podtrzymującej prowadzi do stopniowego wygaszania oscylacji.
- Po szarpnięciu struny gitarowej obserwujemy zanik jej drgań w czasie kilku sekund.
- Aby huśtawka kontynuowała oscylacje, musimy ją popychać.

Drgania

Drgania tłumione

- klocek o masie m przymocowany do sprężyny o współczynniku sprężystości k .
- Klocek podniesiono do położenia A_0 , które jest początkową amplitudą, a następnie puszczono go swobodnie.
- Klocek wykonuje drgania wokół położenia równowagi w cieczy o lepkości η , a kolejne uzyskiwane wartości amplitudy maleją wraz z upływem czasu.
- Jest to wykres dla układu ze słabym tłumieniem.
- Ten zanik oscylacji wywołują siły oporu ośrodka, a więc siły niezachowawcze, których działanie powoduje tworzenie różnych form energii termicznej kosztem energii oscylatora.



Drgania

Drgania tłumione

- Siła ciężkości działająca na ten ciężarek jest kompensowana zmianą położenia równowagi - na siłę wypadkową wpływa zarówno siła sprężystości związana ze sprężyną, jak i siła oporu ośrodka F .
- Jeśli maksymalna prędkość drgającego ciężarka jest mała, to siła oporu ośrodka jest proporcjonalna do prędkości ciała i działa przeciwnie do kierunku ruchu ciężarka $F = -b v$ (b – współczynnik oporu).
- W tych warunkach wypadkowa siła działająca na ciężarek o masie wynosi:

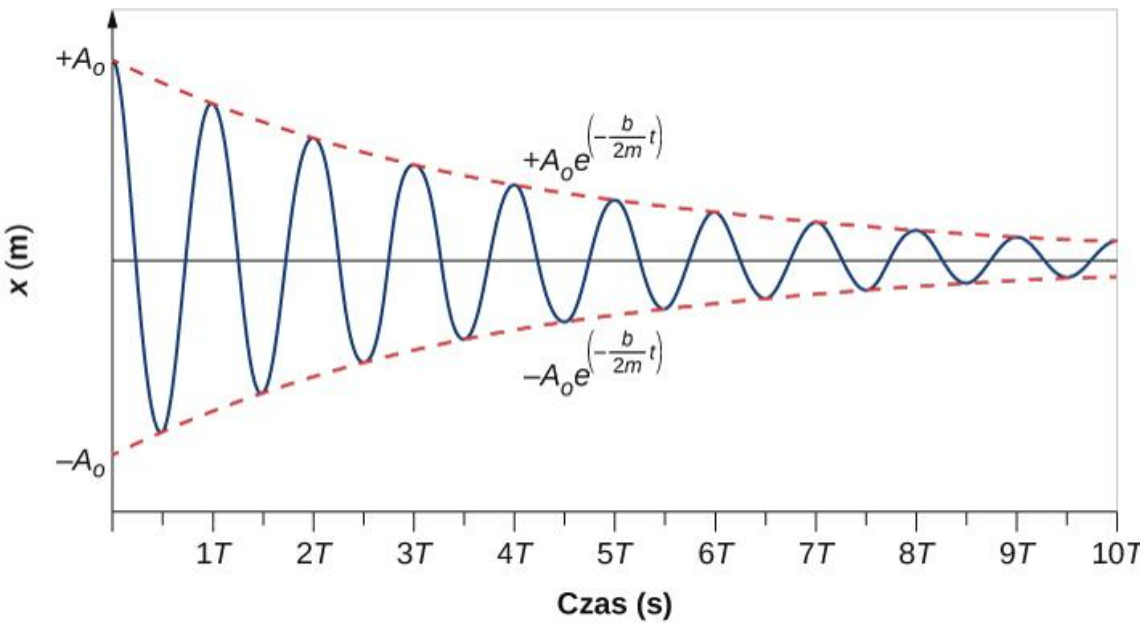
$$ma = -bv - kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



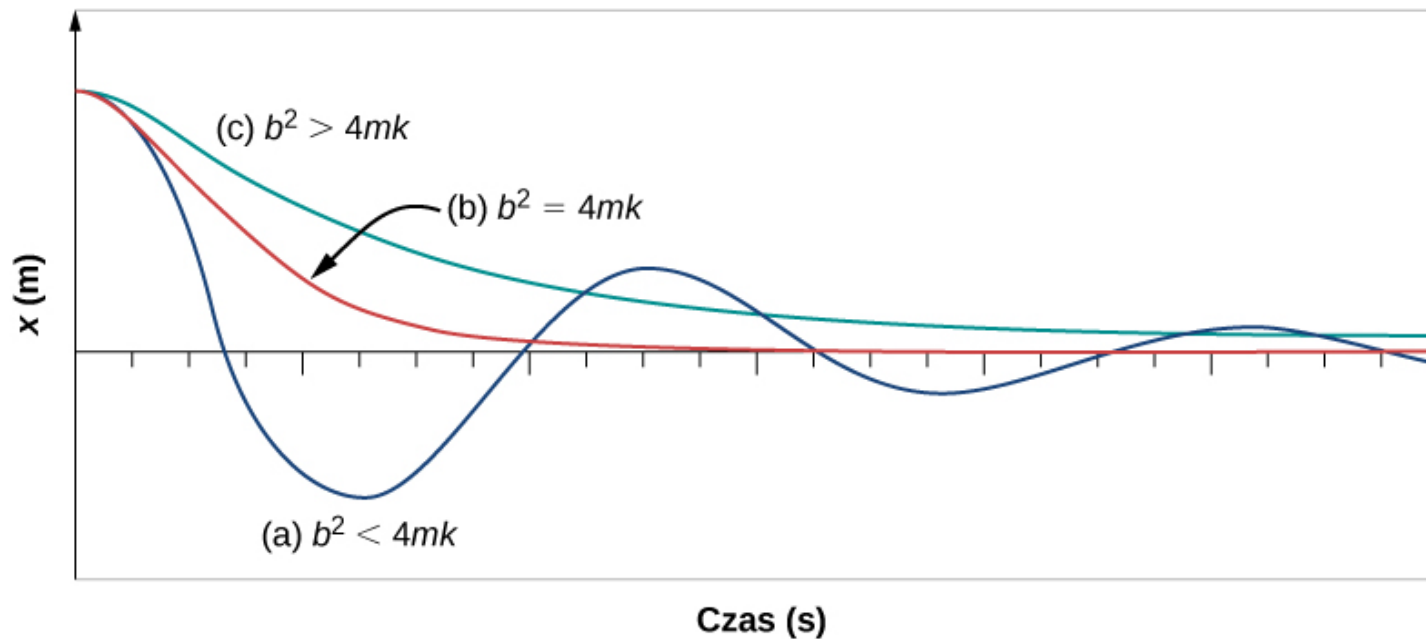
Drgania

Drgania tłumione

- w ruchu harmonicznym tłumionym, stwierdziliśmy, że tłumienie musi być małe,

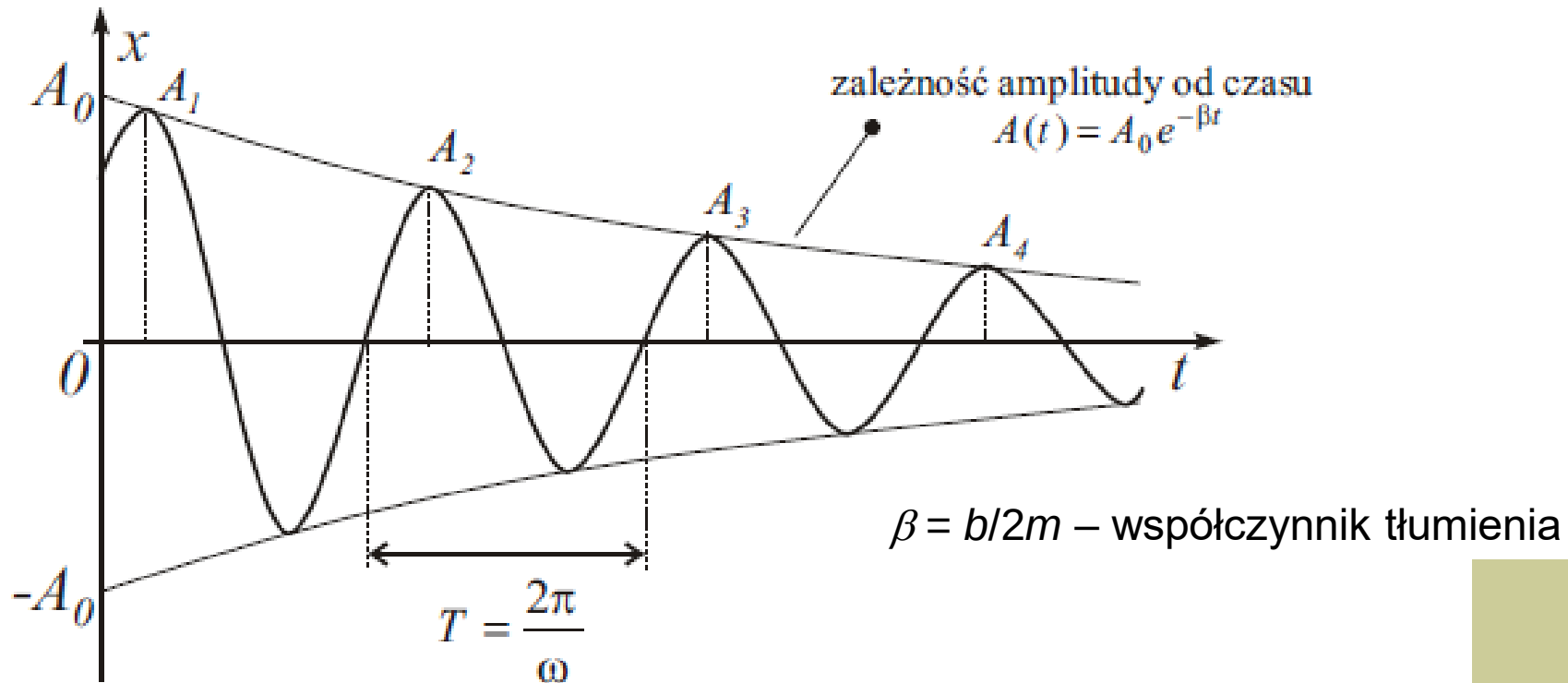
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

- gdy b wzrasta, wyrażenie pod pierwiastkiem maleje,
- gdy $b = \sqrt{4mk}$, to częstość wynosi 0,
- gdy b jeszcze wzrasta, częstość staje się liczbą zespoloną.
- W przypadku bardzo dużego tłumienia układ nie wykazuje oscylacji i powoli zmierza do położenia równowagi.



Drgania

Drgania tłumione



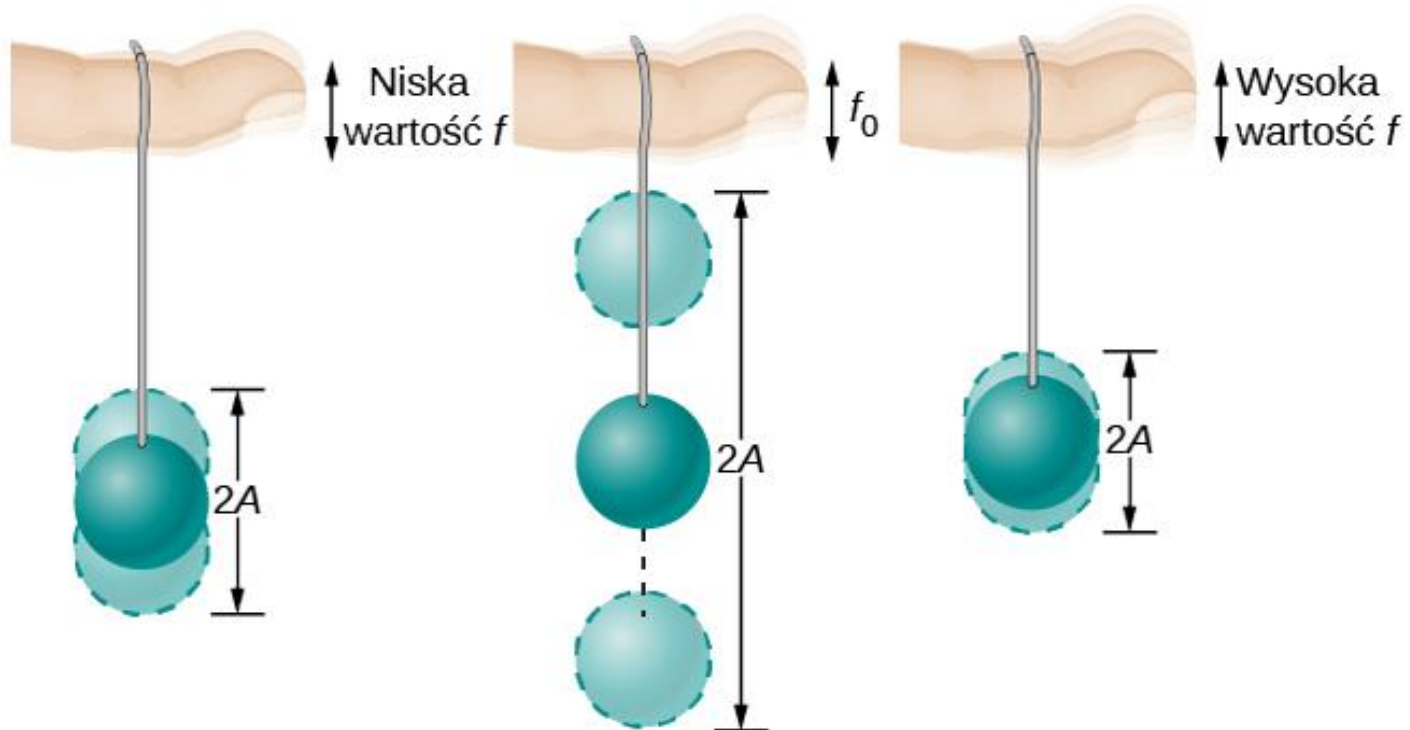
Drgania

Drgania wymuszone

- Poprzez zaśpiewanie głośno dźwięku przy fortepianie, struny fortepianu można zmusić do drgań z częstotliwościami własnymi.
- Dźwięk można traktować jako dodatkową siłę wywołującą drgania – siłę wymuszającą.
- Działanie siły wymuszającej zwiększa energię układu przy pewnej częstotliwości, niekoniecznie tej samej, co częstotliwość drgań własnych oscylatora.
- Przypomnijmy, że częstość drgań własnych oscylatora jest to częstość swobodnych drgań układu zachodzących w nieobecności zarówno siły wymuszającej, jak i oporu ośrodka.

Drgania

Drgania wymuszone



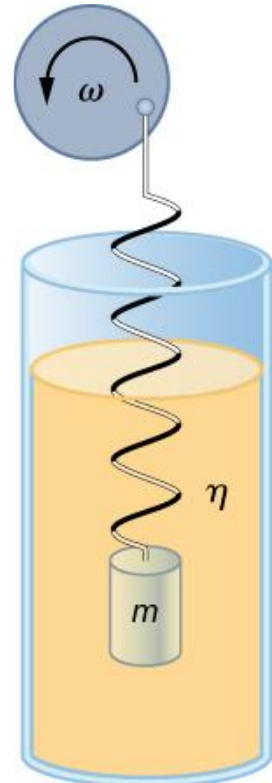
Drgania

Drgania wymuszone

- Przymocujemy klocek o masie do sprężyny zanurzonej w naczyniu z lepłą cieczą.
- Zamiast podwieszać swobodny koniec sprężyny do sztywnego zawieszenia, przymocujemy ją do tarczy napędzanej przez silnik o zmiennej częstotliwości obrotów.
- Silnik rotuje z prędkością kątową ω .
- Obracająca się tarcza dostarcza energię do układu poprzez wykonanie pracy na skutek działania siły wymuszającej na sprężynę.
- Przeanalizujemy ruch klocka

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\omega t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_{\text{wym}} = F_0 \sin(\omega t)$$



Drgania

Drgania wymuszone

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\omega t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

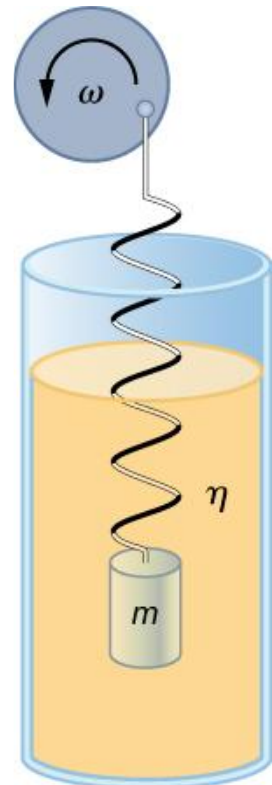
- Ponieważ ruch jest okresowy, to szukamy rozwiązania postaci:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

- jest to prawda, gdy

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}$$

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

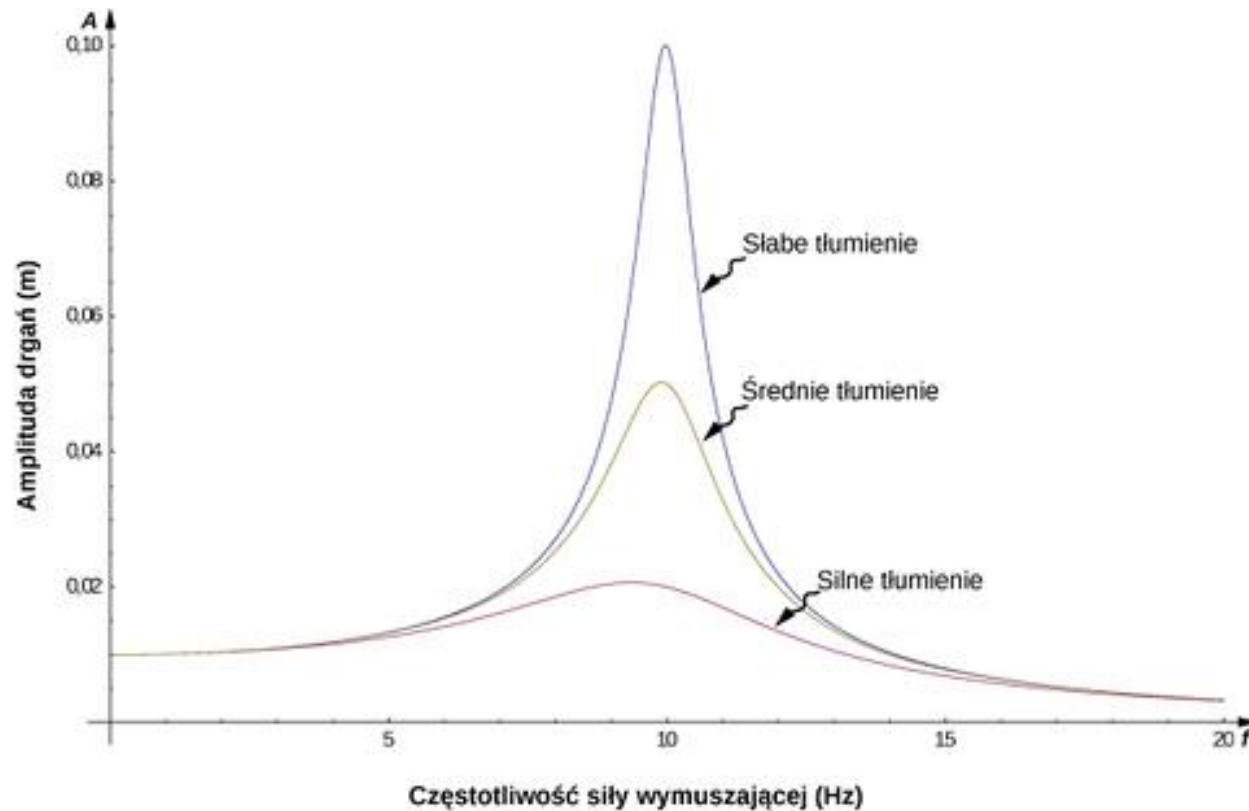


$$F_{\text{wym}} = F_0 \sin(\omega t)$$

Drgania

Drgania wymuszone

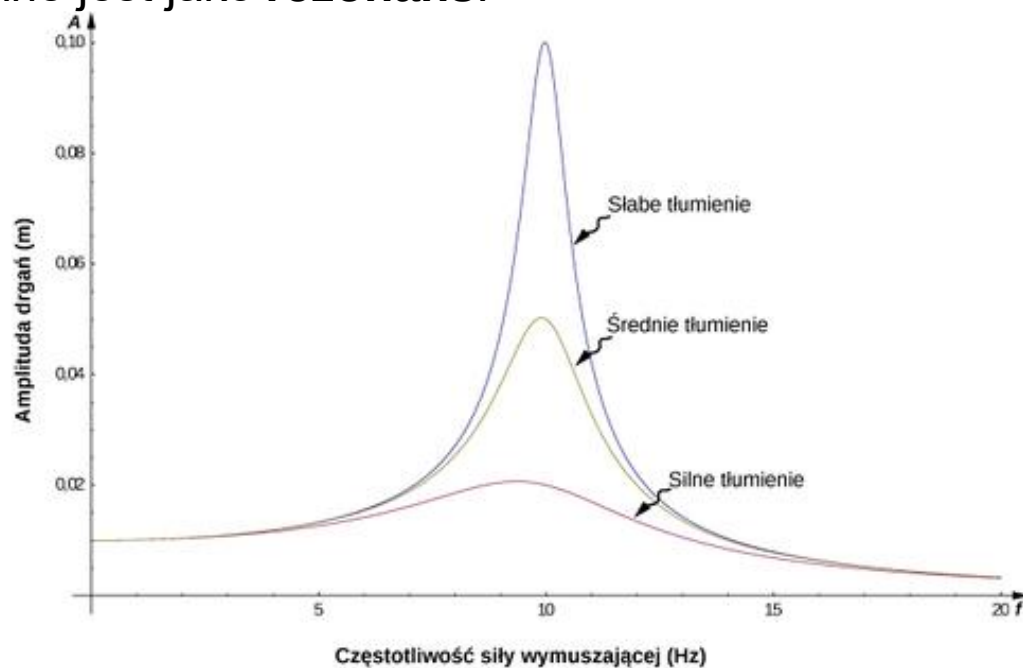
$$A_{\max} = \frac{F_0}{b \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}}$$



Drgania

Drgania wymuszone – rezonans

- Szczególnie wysokie maksima obserwuje się dla układów z minimalnym udziałem tłumienia, co przekłada się na mniejsze straty energetyczne ze względu na opór ośrodka.
- Amplituda drgań rośnie, gdy współczynnik tłumienia maleje, a w granicy nieobecności tłumienia amplituda drgań przyjmuje wartość nieskończoności.
- Zauważmy, że siła wymuszająca o małej amplitudzie może spowodować odpowiedź oscylatora w postaci bardzo dużych amplitud drgań. Zjawisko to znane jest jako **rezonans**.



Drgania

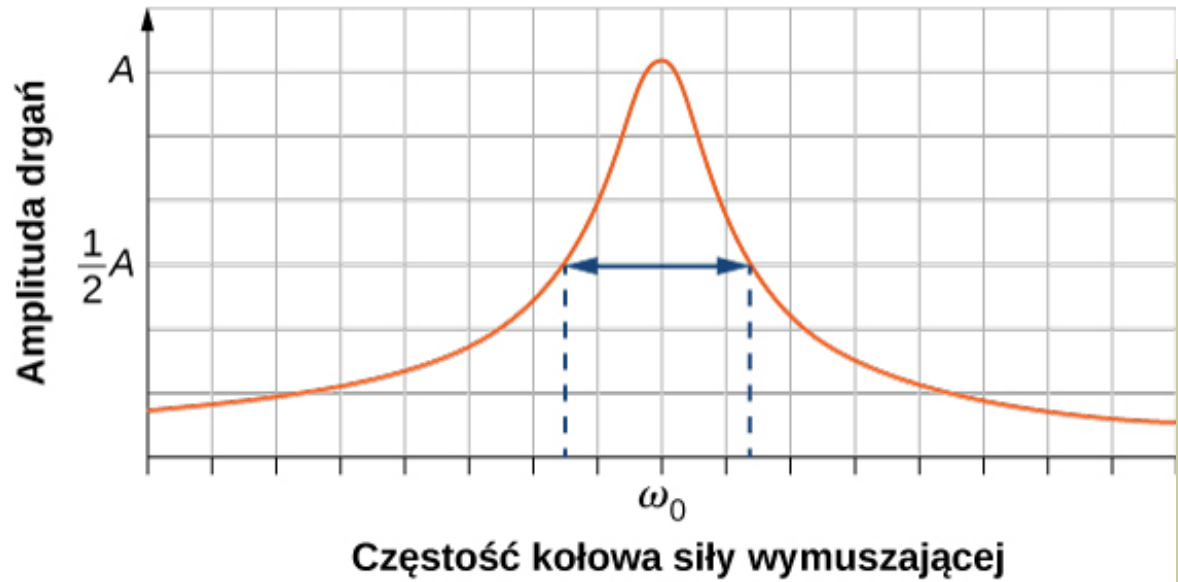
Drgania wymuszone – rezonans

- Dobroć układu zdefiniowana jest jako stosunek własnej częstości kołowej oscylatora do szerokości krzywej rezonansowej:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

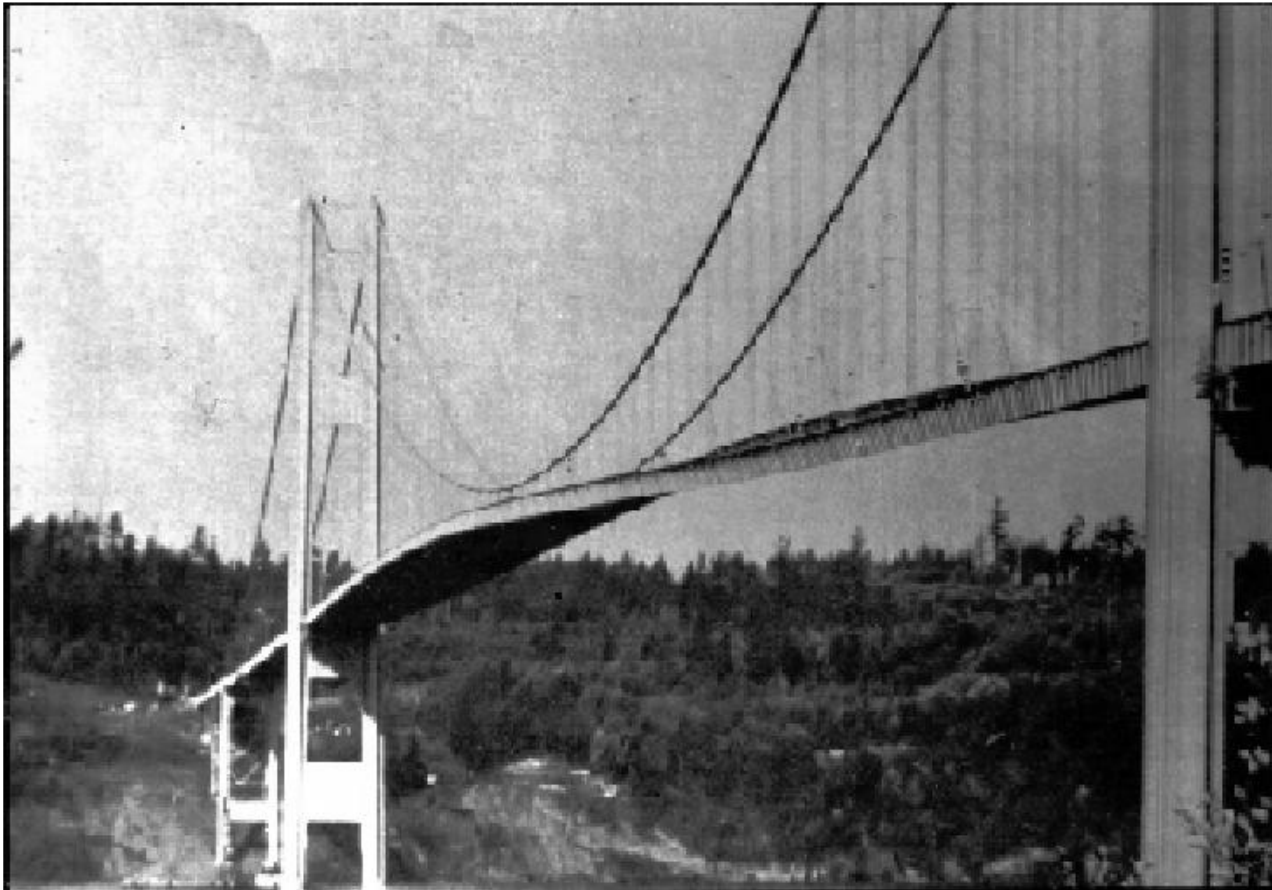
- W warunkach słabego tłumienia parametr dobroci wynosi:

$$Q \approx \frac{\omega_0 m}{b}$$



Drgania

Drgania wymuszone – rezonans



W 1940 r. most w Tacoma w stanie Waszyngton uległ zniszczeniu. Przyczyną był wiejący od oceanu zmienny wiatr, który choć słabszy od huraganu, wprowadził most w oscylacje przy częstotliwości rezonansowej.

Dziękuję za uwagę!